Chapitre IV Les Ext de faisceaux de modules.

4. 1. Les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A,B)$ **et** $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A,B)$. Soit X un espace topologique muni d'un faisceau $\mathbf{O}$ d'anneaux avec unité, et soit $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ la catégorie abélienne des $\mathbf{O}$-Modules (à gauche) sur X (cf. 3. 1). Si A et B sont deux $\mathbf{O}$-modules, nous désignons par $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A,B)$ le groupe des $\mathbf{O}$-homomorphismes du premier dans le second (ce groupe est en fait un module sur le centre de $\Gamma(\mathbf{O})$). Si U est une partie quelconque de X, on posera

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(U;\ A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}|U}(A|U, B|U)$$

(où $F|U$ désigne, comme d'habitude, la restriction d'un faisceau F à U). Bien entendu, si $V\subset U$, on a un homomorphisme naturel $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(U;\ A,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(V, A,B)$, et on vérifie immédiatment que si on se restreint aux parties ouvertes U de X, les groupes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(U;\ A,B)$ forment un *faisceau* sur X, noté $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A,B)$. Ainsi par définition, on a

$$\Gamma\ (U, \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A,B)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(U;\ A,B) \tag{4. 1. 1}$$

et en particulier, faisant $U=X$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A,B) = \Gamma\ (\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A,B)). \tag{4. 1. 2}$$

D'ailleurs, $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A,B)$ peut aussi être considéré comme un faisceau de modules sur le *centre* $\mathbf{O}^{\natural}$ de $\mathbf{O}$.

Rappelons que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A,B)$ est un *foncteur additif exact à gauche* en les deux arguments $A,B\in\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$, à valeurs dans les groupes abéliens. On en conclut que $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A,B)$ peut aussi être regardé comme un foncteur exact à gauche en les deux arguments $A,B\in\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$, à valeurs dans la catégorie $\mathbf{C}^X$ des faisceaux abéliens sur X, (ou même à valeurs dans la catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{O}^{\natural}}$). Comme d'habitude, tous les homomorphismes que nous écrirons seront "fonctoriels". Ce numéro donne quelques propriétés auxiliaires des foncteurs envisagés, préliminaires à l'étude de leurs foncteurs dérivés.

Soient $A,B\in\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$, et soit $x\in X$. Pour tout ouvert U contenant x, on a un homomorphisme évident $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(U;A,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(A(x),B(x))$, d'où par passage à la limite inductive sur les voisinages ouverts de x, un homomorphisme naturel

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A,B)(x)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(A(x),B(x)) \tag{4. 1. 3}$$

que nous allons étudier. Nous dirons que A *est de type fini en* x si on peut trouver un voisinage ouvert U de x tel que $A|U$ soit isomorphe à un quotient de $(\mathbf{O}|U)^n$ (où n est un entier fini >0); A est dit *pseudo-cohérent en* x si on peut trouver un voisinage ouvert U de x, et *sur* U une suite exacte d'homomorphismes $\mathbf{O}^m\to\mathbf{O}^n\to A\to 0$ (m, n entiers finis >0). Nous dirons que A est de type fini (resp. pseudo-cohérent) s'il l'est en tout point. Ceci posé:

PROPOSITION 4. 1. 1. *L'homomorphisme* (4. 1. 3) *est un monomorphisme si A est de type fini en x, et un isomorphisme si A est pseudo-cohérent en x.*

Supposons A de type fini en x, alors, en se restreignant au besoin à un voisinage convenable de x, on a une suite exacte $\mathbf{O}^n\to A\to 0$ d'où une suite exacte $0 \to \mathbf{Hom_O}(A, B) \to \mathbf{Hom_O}(\mathbf{O}^n. B)$, et une suite exacte $\mathbf{O}^n(x) \to A(x) \to 0$, d'où une suite exacte $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(A(x), B(x)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(\mathbf{O}^n(x), B(x))$. On en déduit un homomorphisme de suites exactes:

$$\begin{array}{ccc} 0 \to \mathbf{Hom_O}(A, B)(x) & \longrightarrow & \mathbf{Hom_O}(\mathbf{O}^n, B)(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(A(x), B(x)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(\mathbf{O}^n(x), B(x)). \end{array}$$

Or on a $\mathbf{Hom_O}(\mathbf{O}^n, B) = \mathbf{Hom_O}(\mathbf{O}, B)^n = B^n$, car on a un isomorphisme canonique

(4.3.4) $$\mathbf{Hom_O}(\mathbf{O}, B) = B.$$

Les groupes dans la dernière colonne du diagramme s'identifient donc respectivement à $B(x)^n$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(\mathbf{O}(x), \mathrm{B}(x))^n = B(x)^n$, donc le dernier homomorphisme vertical est un isomorphisme, d'où on conclut aussitôt que le premier homomorphisme est un monomorphisme. Supposons maintenant que A soit pseudo-cohérent en x, c'est-à-dire (en se restreignant au besoin à un voisinage convenable de x) qu'on a une suite exacte $\mathbf{O}^m \to \mathbf{O}^n \to A \to 0$. Se servant toujours de l'exactitude à gauche des foncteurs Hom, on en conclut encore un homomorphisme de suites exactes:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \mathbf{Hom_O}(A, B)(x) & \longrightarrow & \mathbf{Hom_O}(\mathbf{O}^n, B)(x) & \longrightarrow & \mathbf{Hom_O}(\mathbf{O}^m, B)(x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(A(x), B(x)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(\mathbf{O}^n(x), B(x)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(\mathbf{O}^m(x), B(x)). \end{array}$$

Nous avons déjà remarqué que les deux derniers homomorphismes verticaux sont bijectifs. Il en résulte aussitôt que le premier homomorphisme vertical est un isomorphisme.

Supposons maintenant que B soit un objet injectif de la catégorie abélienne $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$, peut on en conclure que $B(x)$ est un $\mathbf{O}(x)$-module injectif? En vertu du lemme 1 de 1.10., il suffit de vérifier que pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{O}(x)$ et tout $\mathbf{O}(x)$-homomorphisme de $\mathfrak{a}$ dans $B(x)$, ce dernier peut se prolonger en un $\mathbf{O}(x)$-homomorphisme de $\mathbf{O}(x)$ dans $B(x)$. Comme la restriction d'un $\mathbf{O}$-Module injectif à un ouvert est encore injectif (prop. 3.1.3), il suffit pour ceci que l'on puisse trouver un voisinage ouvert U de x, un sous-Module A de $\mathbf{O}|U$, enfin un homomorphisme u de A dans $B|U$, de telle façon que $A(x) = \mathfrak{a}$ et que l'homomorphisme de $A(x)$ dans $B(x)$ défini par u soit l'homomorphisme donné $\mathfrak{a} \to B(x)$. D'ailleurs, si A est pseudo-cohérent en x, l'existence de u résulte automatiquement de prop. 4.1.1. Prouvons alors:

LEMME 1. *Supposons que* $\mathbf{O}$ *soit un faisceau cohérent d'anneaux* [15, Chap. I, par. 2], *soit* M *un* $\mathbf{O}$*-Module cohérent ("faisceau cohérent de modules" dans la terminologie de* [15]), *et* $\mathfrak{n}$ *un sous-module de type fini de* $M(x)$. *Alors il existe, sur un voisinage ouvert convenable* U *de* x, *un sous-faisceau cohérent* N *de* M *tel que* $N(x) = \mathfrak{n}$.

Soit (n_i) un système fini de générateurs de $\mathfrak{n}$ $(1 \leqq i \leqq k)$. Pour tout i, on a $n_i \in M(x)$, donc $n_i = f_i(x)$, où f_i est une section de M définie dans un voisinage ouvert de x. On peut supposer tous les f_i définis dans un même voisinage ouvert U, ils définissent alors au dessus de U un homomorphisme $\mathbf{O}^k \to M$. On prendra pour N l'image de ce homomorphisme, qui est cohérent comme sous-module de type fini du faisceau cohérent M. Tenant compte alors des réflexions qui ont précédé le lemme 1, on trouve:

PROPOSITION 4.1.2. *Supposons que* $\mathbf{O}$ *soit un faisceau cohérent d'anneaux noethériens à gauche. Alors pour tout* $\mathbf{O}$*-module injectif* B *et tout* $x \in X, B(x)$ *est un* $\mathbf{O}(x)$*-module injectif.*

Enfin, signalons encore :

PROPOSITION 4.1.3. *Soient* A *et* B *deux* $\mathbf{O}$*-modules. Si* B *est injectif alors* $\mathbf{Hom_O}\,(A, B)$ *est un faisceau flasque* (*cf.* 3.3).

En effet, une section de ce faisceau sur l'ouvert U s'identifie à un homomorphisme du $\mathbf{O}$-module A_U dans B (où la notation A_U est celle de 3.5), donc (B étant injectif) se prolonge en un homomorphisme de A dans B, i.e. en une section de $\mathbf{Hom_O}\,(A, B)$ sur tout X.

4.2. **Les foncteurs** $\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(X, A, B)$ **et** $\mathbf{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(A, B)$ **et la suite spectrale fondamentale.** En vertu du corollaire à prop. 3.1.1., on peut prendre les foncteurs dérivés de tout foncteur covariant additif défini sur $\mathbf{C^O}$. En particulier, cela permet de construire comme d'habitude les foncteurs $\mathrm{Ext}^p(A, B)$ dans $\mathbf{C^O}$ comme foncteurs dérivés droits du foncteur $B \to \mathrm{Hom}\,(A, B)$ dans $\mathbf{C^O}$, à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Pour éviter des confusions de notations, nous allons cependant noter ces foncteurs $\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(X;\, A, B)$, (indiquant dans la notation à la fois l'espace X et le faisceau d'anneaux $\mathbf{O}$). Nous poserons, pour toute partie U de X.

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(U;\, A, B) = \mathrm{Ext}_{\mathbf{O}|U}(U;\, A|U, B|U). \tag{4.2.1}$$

Compte tenu de la proposition 3.1.3 et du fait que le foncteur $B \to B|U$ est exact, on voit que les $\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(U;\, A, B)$ sont les foncteurs dérivés droits du foncteur $B \to \mathrm{Hom_O}\,(U; A, B)$ sur $\mathbf{C^O}$. Les homomorphismes fonctoriels $\mathrm{Hom_O}(U;\, A, B) \to \mathrm{Hom_O}\,(V;\, A, B)$ définissent par suite des homomorphismes pour les foncteurs dérivés droits:

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(U; A, B) \to \mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}(V; A, B) \qquad (V \subset U) \tag{4.2.2}$$

grâce auquels le système des $\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(U; A, B)$, pour U ouvert variable, devient un ***préfaisceau abélien*** sur X, noté $\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(-\,; A, B)$.

On peut aussi considérer les foncteurs dérivés droits de $\mathbf{Hom_O}\,(A, B)$ par rapport à B, on les note $\mathbf{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(A, B)$. Ici, tenant compte de prop. 3.1.3 et de la relation évidente $\mathbf{Hom_O}\,(A, B)|U = \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}|U}\,(A|U, B|U)$, on trouve des isomorphismes

$$\mathbf{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(A, B)|U = \mathbf{Ext}^p_{\mathbf{O}|U}\,(A|U, B|U)) \tag{4.2.3}$$

(c'est pourquoi on se dispense de préciser dans la notation sur quel espace on se place). De façon imagée, *les foncteurs* $\mathbf{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(A, B)$ *sont de nature locale* (contrairement aux foncteurs $\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}(X, A, B)$, essentiellement "globaux"). En vertu de lemme 3.7.2, $\mathbf{Ext}^p_{\mathbf{O}}(A, B)$ peut être considéré aussi comme le faisceau associé au préfaisceau $\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(-\,; A, B)$ défini ci-dessus.

Les considérations de la fin de 2.3 montrent que les $\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}\,(X; A, B)$ resp.

les $\mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}^p(A, B)$ forment non seulement des *foncteurs cohomologiques covariants par rapport à* B, mais aussi des *foncteurs cohomologiques contrevariants par rapport à* A, grâce au fait que pour B injectif, les foncteurs $A \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ et $A \to \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ sont exacts. (Le deuxième fait se vérifie immédiatement à partir du premier, grâce à prop. 3.1.3).

Remarquons enfin, pour finir les sorites, que les $\mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}^p(X; A, B)$ sont des modules sur le centre de $\Gamma(\mathbf{O})$, et que les $\mathbf{Ext}_{\mathbf{O}}^p(A, B)$ sont des Modules sur le faisceau d'anneaux $\mathbf{O}^\natural$ centre de $\mathbf{O}$.

La formule (4.1.2) peut aussi s'écrire, en désignant par h_A resp. $\mathbf{h}_A$ le foncteur covariant de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ dans la catégorie $\mathbf{C}$ des groupes abéliens, resp. $\mathbf{C}^X$, défini par

$$h_A(B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B), \qquad \mathbf{h}_A(B) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B): \qquad (42.4)$$

$$h_A = \Gamma \mathbf{h}_A.$$

Donc h_A apparaît comme un foncteur composé, qui est justiciable de théorème 2.4.1 en vertu de prop. 4.1.3 et du corollaire à la prop. 3.3.1. On obtient donc :

THÉORÈME 4.2.1. *Soit X un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux avec unité $\mathbf{O}$, soit $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ la catégorie des $\mathbf{O}$-Modules sur X. Soit $A \in \mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ un $\mathbf{O}$-module fixé. Alors il existe sur $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ un foncteur spectral cohomologique, aboutissant au foncteur gradué* $(\mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}^p(X; A, B))$, *et dont le terme initial est*

$$I_2^{p,q}(A, B) = H^p(X, \mathbf{Ext}_{\mathbf{O}}^q(A, B)). \qquad (4.2.5)$$

On en conclut en particulier des *"edge homomorphisms"*

$$\begin{aligned} &H^p(X, \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)) \to \mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}^p(X; A, B), \\ &\mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}^p(X; A, B) \to H^0(X, \mathbf{Ext}_{\mathbf{O}}^p(A, B)) \end{aligned} \qquad (4.2.6)$$

(ce dernier étant d'ailleurs celui qui résulte de l'interprétation de $\mathbf{Ext}_{\mathbf{O}}^p(A, B)$ comme le faisceau associé au préfaisceau $\mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}^p(-; A, B)$), et une suite exacte à 5 termes :

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(X, \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)) \to \mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}^1(X; A, B) \to H^0(X, \mathbf{Ext}_{\mathbf{O}}^1(A, B)) \\ \to H^2(X, \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)) \to \mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}^2(X; A, B). \end{aligned} \qquad (4.2.7)$$

Cette suite exacte *précise en particulier la structure du groupe* $\mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}^1(X; A, B)$ *des classes de $\mathbf{O}$-Modules extensions de A* (Module quotient) *par B* (sous-Module).

Pour pouvoir utiliser la suite spectrale obtenue, il faut préciser encore le calcul des $\mathbf{Ext}_{\mathbf{O}}^p(A, B)$. Comme le foncteur $F \to F(x)$ qui, à un faisceau abélien F, associe son groupe ponctuel $F(x)$, est *exact*, les $\mathbf{Ext}_{\mathbf{O}}^p(A, B)(x)$ peuvent être considérés, pour A fixé et p, B variables, comme formant un foncteur cohomologique covariant universel en B, se réduisant à $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)(x)$ en dimension 0. De même, les $\mathrm{Ext}_{\mathbf{O}(x)}^p(A(x), B(x))$ forment un foncteur cohomologique en B, se réduisant à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(A(x), B(x))$ en dimension 0. On conclut donc, du homomorphisme fonctoriel (4.1.3), (grâce à la définion des foncteurs cohomologiques universels) des homomorphismes

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}^p(A, B)(x) \to \mathrm{Ext}_{\mathbf{O}(x)}^p(A(x), B(x)) \qquad (4.2.8)$$

(qui sont caractérisés par la condition de définir un homomorphisme de foncteurs cohomologiques, se réduisant à l'homomorphisme (4.1.3) en dimension 0). A étant fixé, pour que ces homomorphismes soient des isomorphismes quel que soit p et B, il faut et il suffit que (i) ce soit le cas pour $p = 0$ (ii) $\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}(x)}(A(x), B(x)) = 0$ si $p > 0$ et B est un $\mathbf{O}$-module injectif. Les propositions 4.1.1 et 4.1.2 ont visiblement été faites exprès pour vérifier ces conditions. On obtient par suite :

THÉORÈME 4.2.2. *Supposons que* $\mathbf{O}$ *soit un faisceau cohérent d'anneaux noethériens à gauche, et que* A *soit un* $\mathbf{O}$*-module cohérent. Alors les homomorphismes* (4.2.8) *sont des isomorphismes quel que soit* B *et* p.

Notons enfin le cas trivial suivant où les homomorphismes (4.2.8) sont des isomorphismes, les deux membres étant nuls :

PROPOSITION 4.2.3. *Supposons que* A *soit localement isomorphe à* $\mathbf{O}^n$ *(où* n *est un entier fini* > 0 *donné). Alors* $\mathbf{Ext}^p_{\mathbf{O}}(A, B) = 0$ *pour tout* $\mathbf{O}$*-module* B *et* $p > 0$.

En effet, en vertu de la nature locale de $\mathbf{Ext}^p_{\mathbf{O}}(A, B)$, on peut supposer $A = \mathbf{O}^n$. Mais alors $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B) = B^n$ est un foncteur *exact* en B, d'où la conclusion.

COROLLAIRE. *Si* A *est localement isomorphe à* $\mathbf{O}^n$, *on a*

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}(X; A, B) = H^p(X, \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B))$$

pour tout $\mathbf{O}$*-module* B.

Cela résulte en effet aussitôt de la suite spectrale du théorème 4.2.1. En particulier, on trouve (faisant $A = \mathbf{O}$) :

(4.2.9) $$H^p(X, B) = \mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}(X; \mathbf{O}, B)$$

formule valable sans aucune hypothèse sur $\mathbf{O}$ ou le $\mathbf{O}$-module B, et qui est d'ailleurs triviale directement, les $H^p(X, B)$ étant les foncteurs dérivés, *dans* $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ (grâce à prop. 4.1.3) du foncteur $\Gamma(B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{O}, B)$.

Pour terminer ce N°, nous indiquons une "méthode de calcul" de la suite spectrale du théorème 4.2.1, plus commode que celle qui résulterait de l'application pure et simple de la définition.

PROPOSITION 4.2.4. *Soit* $\mathbf{L} = (L_i)$ *une résolution gauche de* A *par des* $\mathbf{O}$*-modules* L_i *localement isomorphes à des* $\mathbf{O}^{n_i}$, *considérons le foncteur* $\mathbf{h_L}$ *sur* $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$, *à valeurs dans les complexes à degres positifs dans* $\mathbf{C}$, *défini par* $\mathbf{h_L}(B) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{L}, B)$; *posons de même* $\mathbf{h}_A(B) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$. *Alors* $\mathbf{h_L}$ *est une résolvante* (*cf.* 2.5) *du foncteur* $\mathbf{h}_A$.

En effet, $\mathbf{h_L}$ est un foncteur exact (prop. 4.2.3), de plus $H^0(\mathbf{h_L}(B)) = \mathbf{h}_A(B)$ grâce au fait que le foncteur $C \to \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(C, B)$ est exact à gauche en C, enfin si B est injectif, $\mathbf{h_L}(B)$ est un complexe acyclique en dimensions > 0, puisque alors le foncteur $C \to \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(C, B)$ est exact.

COROLLAIRE 1. *Sous les conditions de la proposition précédente, on a*

(5.2.10) $$\mathbf{Ext}^n(A,B) = H^n(\mathbf{Hom}_O(\mathbf{L},B))$$ *d'où*

(5.2.10 *bis*) $$\mathbf{Ext}^n(A,B)(x) = \mathrm{Ext}^n_{O(x)}(A(x),B(x)),$$

Il suffit en effet d'appliquer prop. 2.5.1.

Appliquons manitenant prop. 2.5.4, on trouve :

COROLLAIRE 2. *Sous les conditions précédentes, le foncteur spectral du th.* 4.2.1 *est isomorphe au foncteur spectral* II $\Gamma(\mathbf{Hom}_O(\mathbf{L},B))$, *en particulier on a*

$$\mathrm{Ext}^n_O(X;A,B) = \mathfrak{R}^n\Gamma\,\mathbf{Hom}_O(\mathbf{L},B))$$

(*où le deuxième membre est le n.ème groupe de hyperhomologie de* Γ *par rapport au complexe* $\mathbf{Hom}_O(\mathbf{L},B)$, *cf.* 2.4.).

Comme nous disposons aussi d'un foncteur résolvant pour Γ, par exemple le foncteur $\Gamma\mathbf{C}(F)$ (où $\mathbf{C}(F)$ est la *résolution canonique* de F, cf. 2.3), la suite spectrale II $\Gamma(\mathbf{Hom}_O(\mathbf{L},B))$ s'explicite, c'est la première suite spectrale du bicomplexe $\Gamma\mathbf{C}(\mathbf{Hom}_O(\mathbf{L},B))$ (où on a pris comme premier degré celui qui provient de $\mathbf{C}$). Or on a un isomorphisme fonctoriel

(4.2.11) $$\mathbf{C}(\mathbf{Hom}_O(\mathbf{L},B)) = \mathbf{Hom}_O(\mathbf{L},\mathbf{C}(B)).$$

En effet, on a pour tout $\mathbf{O}$-Module L un homomorphisme (fonctoriel)

(4.2.12) $$\mathbf{C}(\mathbf{Hom}_O(L,B)) \to \mathbf{Hom}_O(L,\mathbf{C}(B))$$

(où au deuxième membre, $\mathbf{C}(B)$ est considéré de façon évidente comme un $\mathbf{O}$-Module), défini par récurrence sur la dimension des composantes de $\mathbf{C}$ à partir de l'homomorphisme naturel $\mathbf{C}^0(\mathbf{Hom}_O(L,B)) \to \mathbf{Hom}_O(L,\mathbf{C}^0(B))$, déduit des homomorphismes naturels $\mathbf{Hom}_O(L,B)(x) \to \mathrm{Hom}_{O(x)}(L(x),B(x))$. Ce dernier est un isomorphisme si L est pseudo-cohérent (prop. 4.1.1), d'où on conclut que dans ce cas, (4.2.12) est un isomorphisme, ce qui établit en particulier la formule 4.2.11. On en conclut $\Gamma\mathbf{C}(\mathbf{Hom}_O(\mathbf{L},B)) = \mathrm{Hom}_O(\mathbf{L},\mathbf{C}(B))$, d'où le

COROLLAIRE 3. $\mathbf{L}$ *étant comme dans la proposition* 4.2.1, *le foncteur spectral du théorème* 4.2.1. *est donné par la première suite spectrale* $I\mathrm{Hom}_O(\mathbf{L},\mathbf{C}(B))$ *du bicomplexe* $\mathrm{Hom}_O(\mathbf{L},\mathbf{C}(B))$, *où* $\mathbf{C}(B)$ *est la résolution canonique* (*cf.* 2.3) *du faisceau abélien* B (*dont la graduation est prise comme premier degré du bicomplexe*). *En particulier, on a*

$$\mathrm{Ext}^n_O(X;A,B) = H^n(\mathrm{Hom}_O(\mathbf{L},\mathbf{C}(B)).$$

REMARQUES. 1) On peut aussi définir les foncteurs $\mathrm{Ext}^n_{O,\varphi}(X;A,B)$ comme les foncteurs dérivés droits, par rapport à B, du foncteur $\mathrm{Hom}_{O,\varphi}(A,B) = \Gamma(\mathbf{Hom}_O(A,B))$ (φ étant un antifiltre de parties fermées de X). Les développements précédents sont encore valables. Nous n'aurons pas à nous en servir.

2) Il est essentiel dans le théorème 4.2.2 que A satisfasse à une condition de finitude. Si par exemple $A = \mathbf{O}^{(I)}$ où I est infini, alors le deuxième membre de (4.2.8) est nul pour tout x et tout $p > 0$, cependant on n'aura *pas* en général $\mathbf{Ext}^1_O(A,B) = 0$, car le foncteur $B \to \mathbf{Hom}_O(\mathbf{O}^{(I)},B) = B^I$ n'est en général pas un foncteur exact.

4. 3. Cas d'un faisceau d'anneaux constant. Supposons que $\mathbf{O}$ soit le faisceau d'anneaux constant defini par un anneau avec unité O. Soit M un O-module, et soit $\mathbf{M}$ le $\mathbf{O}$-Module constant qu'il définit. Pour tout $\mathbf{O}$-Module A, on a alors un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{M}, A) = \mathrm{Hom}_O(M, \Gamma(A)). \tag{4. 3. 1}$$

C'est là un isomorphisme fonctoriel, qu'on peut aussi écrire

$$h_{\mathbf{M}} = h_M \Gamma \tag{4. 3. 2}$$

où on pose, comme au numéro précédent, $h_{\mathbf{M}}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{M}, A)$, $h_M(N) = \mathrm{Hom}_O(M, N)$ pour tout $\mathbf{O}$-Module A et tout O-module N. Γ est considéré comme un foncteur de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ dans la catégorie $\mathbf{C}^O$ des O-modules à gauche, et h_M comme un foncteur de $\mathbf{C}^O$ dans la catégorie des groupes abéliens. Le théorème 3. 4. 1 s'applique, grâce au

LEMME *Si A est un $\mathbf{O}$-Module injectif, alors $\Gamma(A)$ est un O-module injectif.*

Il faut montrer que le foncteur $M \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(M, \Gamma(A))$ est exact, ce qui résulte aussitôt de la formule (4. 3. 1), puisque $M \to \mathbf{M}$ est un foncteur exact. On obtient donc, grâce au théorème 3. 4. 1, et en remarquant que les foncteurs dérivès de Γ sont les mêmes, qu'on considère Γ comme prenant ses valeurs dans $\mathbf{C}^O$ ou dans la catégorie $\mathbf{C}$ des groupes abéliens:

THÉOREME 4. 3. 1. *Soient X un espace, O un anneau avec unité, M un O-module, $\mathbf{O}$ et $\mathbf{M}$ les faisceaux constants sur X définis par O et M. Il existe alors un foncteur spectral cohomologique sur $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$, aboutissant au foncteur gradué $(\mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}(X; \mathbf{M}, A))$, et dont le terme initial est*

$$\mathrm{II}_2^{p,q}(A) = \mathrm{Ext}^q_O(M, H^p(X, A)). \tag{4. 3. 3}$$

On en conclut comme d'habitude des "edge-homomorphisms" et une suite exacte à 5 termes que le lecteur explicitera. Pour calculer le foncteur spectral, nous utiliserons le corollaire 1 à la proposition 2. 5. 3, en utilisant le foncteur résolvant $\Gamma\mathrm{C}(A)$ de Γ (qu'on considère ici comme foncteur covariant de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ dans $\mathbf{C}^O$), $\mathrm{C}(A)$ étant la résolution canonique de A (cf. 2. 3), et le foncteur résolvant h_L de h_M, où L est une résolution gauche de M par des O-modules libres. On trouve la première partie de la

PROPOSITION 4. 3. 2. *Sous les conditions du théorème* 4. 3. 1, *choisissons une résolution gauche L de M par des O-modules libres. Alors le foncteur spectral du théorème* 4. 3. 1 *se calcule en prenant la deuxième suite spectrale du bicomplexe* $\mathrm{Hom}_O(L, \Gamma\, \mathrm{C}(A))$, *où* $\mathrm{C}(A)$ *est la résolution canonique de A (cf.* 2. 3). *Si on suppose les L_i isomorphes à des O^{n_i} (n_i entier > 0), la première suite spectrale de ce bicomplexe donne le foncteur spectral du théorème* 4. 2. 1.

Pour la dernière assertion, il suffit de considérer la résolution $\mathbf{L}$ de $\mathbf{M}$ déduite de L, et de lui appliquer le corollaire 3 à la proposition 4. 2. 4. La proposition précédente ramène le calcul de $\mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}(\mathbf{M}, A)$ et de ses suites spectrales à un classique problème du type Künneth. Ainsi:

COROLLAIRE 1. *Supposons que A soit annulé par uu idéal bilatère I de O tel que O/I soit un anneau semi-simple K. Alors les deux suites spectrales du bicomplexe* $\mathrm{Hom}_O(L, \Gamma\mathbf{C}(A))$ *sont triviales, et leurs termes initiaux s'identifient canoniquement à l'homologie* $\mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}(X; \mathbf{M}, A)$ *de ce bicomplexe, et on a plus précisément des isomorphismes canoniques*:

$$(4.3.4)\qquad \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O}}(X; \mathbf{M}, A) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Tor}^O_p(K, M), H^q(X, A)).$$

En effet, $\mathbf{C}(A)$ et par suite $\Gamma\mathbf{C}(A)$ sera aussi annulé par I, d'où on conclut

$$(4.3.5)\qquad \mathrm{Hom}_O(L, \Gamma\mathbf{C}(A)) = \mathrm{Hom}_K(K\otimes_O L, \Gamma\,\mathbf{C}(A))$$

et comme K est semi-simple on peut appliquer la version la plus simple du théorème de Künneth (due au fait que Hom_K est un bifoncteur exact): On trouve la trivialité des suites spectrales, plus la formule $H(\mathrm{Hom}_K(K\otimes_O L, \Gamma\,\mathbf{C}(A)) = \mathrm{Hom}_K(H(K\otimes_O L), H(\Gamma\mathbf{C}(A)))$, ce qui n'est autre que la formule (4.3.4).

Supposons toujours que A est annulé par un idéal bilatère I, mais ne supposons rien sur $K = A/I$. On a (4.3.5), ce qui amène à considérer les suites spectrales de hyperhomologie du bifoncteur Hom_K relativement aux complexes $K\otimes_O L$ et $\Gamma\,\mathbf{C}(A)$. Dans la première le terme initial

$H^p(\mathrm{Ext}^q_K(K\otimes_O L, \Gamma\,\mathbf{C}(A))$ est nul pour $q>0$, puisque $K\otimes_O L$ est K-libre. Donc l'aboutissement s'identifie canoniquement à $H(\mathrm{Hom}_K(K\otimes_O L, \Gamma\,\mathbf{C}(A))$ qu'il s'agit précisément de calculer. Dans la deuxième suite spectrale, le terme initial est $\bigoplus_{q'+q''=q} \mathrm{Ext}^p_K(H^{q'}(K\otimes_O L), H^{q''}\Gamma\,\mathbf{C}(A))$. Donc:

COROLLAIRE 2. *Supposons le* $\mathbf{O}$*-Module A annulé par un idéal bilatère I de* O, *posons $K = A/I$. Alors* $(\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O}}(X; \mathbf{M}, A))$ *est aussi l'aboutissement d'un troisième foncteur spectral, dont le terme initial est*

$$(4.3.6)\qquad \mathrm{III}^{pq}_2(A) = \bigoplus_{q'+q''=q} \mathrm{Ext}^p_K(\mathrm{Tor}^O_{q'}(K, M), H^{q''}(X, A)).$$

En particulier, si K est un "anneau héréditaire à gauche" [6, 1.5] *(par exemple un anneau principal) on a une suite exacte canonique*:

$$0\to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Tor}^O_p(K, M), H^q(X, A))$$
$$\to \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O}}(X; \mathbf{M}, A) \to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Tor}^O_p(K, M), H^q(X, A)) \to 0.$$

REMARQUES. 1. Supposons les L_i isomorphes à des O^{n_i}, alors (prop. 4.3.2) la première suite spectrale d'hyperhomologie du foncteur $\mathrm{Hom}_O(M, -)$ pour le complexe $\Gamma\mathbf{C}(A)$ est celle du théorème 4.2.1 dont le terme initial a donc l'interprétation remarquable (4.2.5). Mais on fera bien attention que ce fait avait été déduit du cor. 3 à prop. 4.2.4 et tient essentiellement à la formule (4.2.11) c'est-à-dire *au fait que le foncteur* $\mathbf{C}$ *"résolvante canonique" permute au foncteur* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{L}, -)$, si L est un O-module isomorphe à un O^n (grâce à quoi on est d'ailleurs dans les conditions du corollaire à la proposition 2.5.2). C'est cependant encore vrai, (pour d'autres raisons) si on remplace $\mathbf{C}(A)$ par la "résolvante de Cartan" $A \otimes_Z F$ (où F est un "faisceau fondamental" sur X supposé paracompact).

2. Soit $x \in X$, alors on a vu dans 4.2. qu'on a $\mathbf{Ext}^p_{\mathbf{O}}(\mathbf{M}, A)(x) = \varinjlim \mathrm{Ext}^p_{\mathbf{O}}(U; \mathbf{M}, A)$, la limite inductive étant prise suivant le filtre des voisinages ouverts U de x. Or pour tout U, on peut écrire les suites spectrales II et III, d'où on conclut par un passage à la limite facile que $(\mathbf{Ext}^p_{\mathbf{O}}(\mathbf{M}, A)(x))_p$ *est l'aboutissement de deux suites spectrales*, dont les termes initiaux sont respectivement

$$II_2^{p,q} = \varinjlim \mathrm{Ext}^p_O(M, H^q(U, A))$$

$$III_2^{p,q} = \bigoplus_{q'+q''=q} \varinjlim \mathrm{Ext}^p_K(\mathrm{Tor}^K_{q'}(K, M), H^{q''}(U, A)).$$

(Dans la deuxième suite spectrale, on suppose A annulé par un idéal bilatère I, et $K = O/I$). Il en résulte que chaque fois que dans l'une de ses suites spectrales, on peut transférer le signe $\varinjlim$ sur $H(U, A)$ dans chacune des composantes du terme initial, la formule $\mathbf{Ext}^p_{\mathbf{O}}(\mathbf{M}, A)(x) = \mathrm{Ext}^p_O(M, A(x))$ est valable (dont la validité n'était assurée à priori que si M admet une résolution projective par des modules O^{n_i} de type fini). Voici deux cas typiques où ceci a lieu: a) A est le faisceau *constant* défini par un O-module N, X est HLC (on regarde la première suite spectrale). b) A est annulé par un idéal I tel que $O/I = K$ soit noethérien, et les $\mathrm{Tor}^O_q(K, M)$ sont de type fini sur K. —Supposons que A soit le faisceau constant défini par un O-module N annulé par I, supposons $K = O/I$ un corps pour simplifier: alors $\mathbf{Ext}^n_{\mathbf{O}}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ est le faisceau associé au préfaisceau défini par les $\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Tor}^O_p(K, M), H^q(U, N))$. Il est facile de construire des exemples (avec $M = N = K$, $p = 1$, O étant l'algèbre $K(G)$ d'un groupe G et I l'idéal d'augmentation) où ce faisceau est distinct du faisceau constant associé à $\mathrm{Ext}^p_O(M, N)$ ($= H^p(G, K)$); dans ce cas, la conclusion du théorème 4.2.2 est donc en défaut.

4.4. Cas des faisceaux avec groupe d'opérateurs. Soit G un groupe et k un anneau commutatif avec unité, on pose $O = k(G)$ (algèbre du groupe G à coéfficients dans k), O est une algèbre augmentée dont l'idéal d'augmentation sera désigné par I: donc k s'identifie à l'O-module O/I. Un $\mathbf{O}$-Module A n'est pas autre chose qu'un faisceau de k-modules admettant G comme groupe d'opérateurs. Dire que A est annulé par I signifie que G opére trivialement sur A. A cause de leur importance pour le chapitre suivant, nous allons reprendre rapidement les notations et résultats essentiels des numéros précédents dans le cas actuel. Sous-entendant une fois pour toutes k dans les notations (en pratique, k sera l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers, ou un corps), on dira G-Module ou G-faisceau au lieu de $\mathbf{O}$-Module. Si A, B sont deux G-faisceaux, on écrira $\mathrm{Hom}_G(B, A)$, $\mathbf{Hom}_G(B, A)$, $\mathrm{Ext}^p_G(X; B, A)$ et $\mathbf{Ext}^p_G(B, A)$ (en mettant G en indice au lieu de $\mathbf{O}$). Dans le cas où $B = k$ (le seul important par la suite) les objets précédents seront notés aussi $\Gamma^G(A)$, A^G, $H^p(X; G, A)$ et

$\mathbf{H}^p(G, A)$. Ainsi Γ^G est le foncteur h_k avec les notations précédentes, on a $\Gamma^G(A) = \Gamma(A)^G$ (groupe des éléments de $\Gamma(A)$ invariants sous $G) = \Gamma(A^G)$, où A^G désigne le sous-faisceau de A formé des germes de sections invariantes sous G. (Si G admet un système *fini* de générateurs, alors A^G est aussi l'ensembe des éléments de A invariants sous G). Les $\mathbf{H}^p(G, A)$ $(-\infty < p < +\infty)$ sont des faisceaux foncteurs de A, qui forment le foncteur cohomologique dérivé de $\Gamma^G(A) = A^G$. On a des homomorphismes canoniques

$$\mathbf{H}^p(G, A)(x) \to H^p(G, A(x))$$

qui sont bijectifs dans tous les cas que nous aurons à considérer, et en tous cas si G est fini (en vertu de th. 4.2.2 ou du corollaire 1 à la prop. 4.2.4, au choix!). Ces foncteurs sont de nature locale, c'est-à-dire permutent à l'opération de restriction à un ouvert. Les $H^p(X; G, A)$ forment le foncteur cohomologique dérivé de $\Gamma^G(A)$. On a le

THÉOREME 4.4.1. *Il existe deux foncteurs spectraux cohomologiques sur la catégorie des G-faisceaux, aboutissant au foncteur gradué* $(H^n(X; G, A))$, *et dont les termes initiaux sont respectvement*

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_2^{p,q}(A) &= H^p(X, \mathbf{H}^q(G, A)), \\ \mathrm{II}_2^{p,q} &= H^p(G, H^q(X, A)). \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Ce sont aussi les deux suites spectrales du "complexe à opérateurs" $\mathbf{C}(A)$, *où* $\mathbf{C}(A)$ *est la résolution canonique de* A, *où les deux suites spectrales de hypercohomologie de l'espace* X *par rapport au complexe* $C(G, A)$ *des "cochaines de* G *à coéfficients dans le faisceau* A". *Ces deux suites spectrales sont triviales si* G *opère trivialement sur* A *et si de plus* A *est un espace vectoriel sur le corps* k; *alors on a un isomorphisme canonique*:

$$H^n(X; G, A) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_k(H_p(G, k), H^q(X, A)). \tag{4.4.2}$$

Plus généralement, supposons seulement que G *opère trivialement sur* A, *alors le corollaire 2 à la prop 4.3.2 donne une suite exacte canonique*:

$$\begin{aligned} 0 \to &\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Ext}^1_Z(H_p(G, Z), H^q(X, A)) \\ &\to H^n(X; G, A) \to \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_Z(H_p(G, Z), H^q(X, A)) \to 0. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

REMARQUES. 1. Dans cette dernière formule, nous avions sous-entendu que $k = Z$. Cependant cela n'a pas d'importance, car si k est quelconque et A est un faisceau de k-modules où G opère, alors les $\mathbf{H}^p(G, A)$ et $H^p(X, G, A)$ sont les mêmes, qu'on regarde A comme un faisceau de $k(G)$-modules ou comme un faisceau de $Z(G)$-modules. Pour le voir on est ramené à prouver que si A est un faisceau injectif de $k(G)$-modules, alors $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{Z}(G)}(X; \mathbf{Z}, A)$ et $\mathbf{Ext}^n_{\mathbf{Z}(G)}(\mathbf{Z}, A)$ (où nous écrivons $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}(G)$ pour les faisceaux constants qu'ils définissent) sont nuls pour $n > 0$. Pour le premier, cela résulte de la suite spectrale *II*, qui montre qu'il est isomorphe à $H^n(G, \Gamma(A))$, qui est nul puisque $\Gamma(A)$ est un k-module injectif (pour lequel le résultat invoqué est bien connu).

Comme $\mathbf{Ext}^n_{\mathbf{Z}(G)}(\mathbf{Z}, A)$ est le faisceau associé au préfaisceau des $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{Z}(G)}(U; \mathbf{Z}, A)$ qui est nul d'après ce qui précède (puisque $A|U$ est aussi injectif), notre assertion est démontrée.

2. Supposons que A soit le faisceau *constant* défini par un G-module M, alors on écrira évidemment $H^p(X; G, M)$ et $\mathbf{H}^p(G, M)$ au lieu de $H^p(X; G, A)$ et $\mathbf{H}^p(G, A)$. Si G opère trivialement sur M, alors $H^p(X; G, M)$ se calcule donc complètement par la formule 4.4.3, ou la formule 4.4.2 si M est un space vectoriel sur un corps k. Dans ce dernier cas, et si X est un espace HLC, on obtient même: $H^*(X, G, M) =$ espace des applications bilinéaires de $H_*(G, k) \times H_*(X, k)$ dans M. On fera attention qu'en général, $\mathbf{H}^p(G, M)$ n'est pas le faisceau constant défini par $H^p(G, M)$, cf. remarque 2 de 4.3.

Chapitre V Etude cohomologique des espaces a opérateurs.

5.1. Généralités sur les G-faisceaux. Dans tout ce Chapitre, nous considérons un espace X où opère un groupe G (à gauche pour fixer les idées). L'opération définie par un $g \in G$ sera notée $x \to g \cdot x$. Nous n'exigeons pas que G opère fidèlement; en particulier, nous aurons à considérer aussi le cas où G opèrerait trivialement. Nous écrirons $X(G)$ pour X muni de la structure supplémentaire définie par les opérations de G. L'espace des trajectoires X/G sera noté Y, il sera muni de la topologie quotient. L'application canonique de X sur Y sera notée f, c'est une application continue ouverte. Y sera considéré comme muni du groupe d'opérateurs G opérant trivialement, on écrira donc $Y(G)$ pour rappeler cette structure supplémentaire sur Y.

Nous appelerons *G-faisceau* sur $X = X(G)$ un faisceau (d'ensembles) A sur X, dans lequel G opère de façon compatible avec ses opérations sur X. Pour donner un sens à cette définition, on pourra par exemple considérer A comme espace étalé dans X (cf. 3.1); nous n'insisterons pas. On définit de même la notion de *G-faisceau de groupes, d'anneaux, de G-faisceau abélien* ($=$ G-faisceau de groupes abéliens) etc. De façon imagée, on peut dire que si X est muni de certaines structures et si un faisceau A sur X est défini en termes structuraux, alors A est un G-faisceau de façon naturelle si les opérations de G dans X sont des automorphismes. Ainsi, un faisceau constant peut toujours être considéré comme un G-faisceau ("*G-faisceau trivial*"), de même le faisceau des germes d'applications quelconques resp. continues de X dans un ensemble donné, le faisceau des germes de fonctions holomorphes si X est une variété holomorphe et si les opérations de G sont des automorphismes de la variété X, etc. On appelle *G-homomorphisme* d'un faisceau dans un autre un homomorphisme de faisceau qui permute aux opérations de G. Si les faisceaux envisagés sont des faisceaux de groupes par exemple, on sous-entend que l'homomorphisme respecte cette structure, comme d'habitude. Avec cette notion d'homomorphisme, les G-faisceaux d'ensembles (resp. les G-faisceaux de groupes etc.) forment une *catégorie* (cf. 1.1), qui a les mêmes propriétés que la catégorie correspondante sans groupe d'opérateurs G, (qui en est d'ailleurs un cas particulier, correspondant au cas où G est réduit à l'élément neutre).

En particulier, les G-faisceaux abéliens forment une catégorie additive, dont nous allons indiquer les propriétés. Plus généralement, soit $\mathbf{O}$ un G-faisceau d'anneaux avec unité, considérons les faisceaux A sur X qui sont à la fois des G-faisceaux abéliens et des $\mathbf{O}$-modules, les opérations de $\mathbf{O}$ sur A étant compatibles avec les opérations de $\mathbf{O}$ (i. e. l'homomorphisme naturel de faisceaux d'ensembles $\mathbf{O} \times A \to A$ étant un G-homomorphisme) : un tel faisceau sera appelé un *G-$\mathbf{O}$-Module*. Appelant *G-$\mathbf{O}$-homomorphisme* un homomorphisme de faisceaux qui est un $\mathbf{O}$-homomorphisme et un G-homomorphisme, on voit que la somme ou le composé de deux G-$\mathbf{O}$-homomorphismes est un G-$\mathbf{O}$-homomorphisme, donc les G-$\mathbf{O}$-Modules forment une *catégorie additive* notée $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$; si $\mathbf{O}$ est le faisceau constant des entiers (avec les opérations triviales de G) on obtient de nouveau la catégorie des G-faisceaux abéliens, notée $\mathbf{C}^{X(G)}$. Si G opère trivialement sur X, la catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$ s'interprète comme la catégorie des $\mathbf{O}'$-Modules, où $\mathbf{O}'$ est un faisceau d'anneaux convenable, si par exemple G opère trivialement sur $\mathbf{O}$, ou aura $\mathbf{O}' = \mathbf{O} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}(G)$, (où $\mathbf{Z}(G)$ désigne l'algèbre de G par rapport à l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers, ou plûtôt le faisceau constant qu'il définit). Les résultats de 3.1 restent valables à de petites modifications près :

PROPOSITION 5.1.1. *Soit $\mathbf{O}$ un G-faisceau d'anneaux sur X. Alors la catégorie additive $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$ des G-$\mathbf{O}$-Modules est une catégorie abélienne, satisfaisant les axiomes* AB 5) *et* AB 3*) *de* 1.5, *et admet un générateur.*[9]

La verification est triviale, sauf l'existence du générateur, dont nous allons donner une construction maintenant, généralisant celle du 3.1. Pour tout ouvert U de X, soit $L(U)$ le $\mathbf{O}$-module somme directe des $\mathbf{O}$-modules $\mathbf{O}_{g \cdot U}$ pour $g \in G$. $L(U)$ peut être considéré comme G-faisceau de façon évidente, de sorte que $L(U)$ devient même un G-$\mathbf{O}$-Module. Si A est un G-$\mathbf{O}$-Module quelconque, un G-$\mathbf{O}$-homomorphisme de $L(U)$ dans A est connu quand on connait sa restriction à $\mathbf{O}_U$, qui est un $\mathbf{O}$-homomorphisme de $\mathbf{O}_U$ dans A, qu'on peut d'ailleurs se donner à l'avance arbitrairement. La donnée d'un tel homomorphisme équivaut aussi à la donnée d'une section de A sur U. Si B est un sous-G-$\mathbf{O}$-Module de A distinct de A, on peut trouver sur un ouvert convenable U une section de A qui n'est pas une section de A. Par suite, la famile de $L(U)$ est une famille de générateurs de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$, et leur somme directe (pour U parcourant tous les ouverts de X) est donc un générateur.

De la proposition 4.1 résulte en particulier que tout G-$\mathbf{O}$-faisceau est isomorphe à un sous-faisceau d'un G-$\mathbf{O}$-Module injectif. Il importe pour la

9) Cette proposition, ainsi que divers résultats de la suite, peuvent s'énoncer aussi dans le contexte plus général qui suit. On se donne une catégorie $\mathbf{C}$, un groupe G, et une "représentation de G par des foncteurs dans $\mathbf{C}$": à tout $g \in G$ est associé un foncteur F_g: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, de telle façon qu'on ait F_e=foncteur identique, $F_g F_{g'} = F_{gg'}$ (du moins à des isomorphismes fonctoriels *donnés* près, satisfaisant à certaines conditions de cohérence que nous n'expliciterons pas). Alors on peut construire la catégorie $\mathbf{C}^G$ des "objets de $\mathbf{C}$ avec groupe d'opérateurs G", tout comme $\mathbf{C}^{X(G)}$ (pour un espace à groupe d'opérateurs $X(G)$) peut se construire à partir de $\mathbf{C}^X$. (Comparer aussi avec le cas particulier, exemple 1.7.f). Beaucoup de propriétés vraies pour $\mathbf{C}$ se conservent alors pas passage à $\mathbf{C}^G$.

suite d'obtenir une forme explicite commode pour "suffisamment" d'objets injectifs, en généralisant la construction faite dans 3.1. Soit $(A_x)_{x\in X}$ une famille de $\mathbf{O}(x)$-modules A_x, considérons le $\mathbf{O}$-Module produit qu'elle définit (cf. 3.1). Pour y faire opérer G de façon à obtenir un G-$\mathbf{O}$-faisceau, il suffit pour tout $x\in X$ et $g\in G$ de se donner un homomorphisme $a\to g.a$ du groupe abélien A_x dans le groupe abélien $A_{g.x}$, de façon qu'on ait $g\cdot(ua)=(g.u)(g.a)$ pour $u\in\mathbf{O}(x)$ et $a\in A_x$, et que $e.a=a$, $g.(g'.a)=(gg').a$. Introduisant alors l'anneau auxiliaire U_x engendré par l'algèbre $\mathbf{Z}(G_x)$ de G_x et l'anneau $\mathbf{O}(x)$, soumis aux relations de commutation $gug^{-1}=u^g$ pour $u\in\mathbf{O}(x)$, $g\in G_x$ (où on note u^g, pour éviter des confusions, le transformé de u par $g\in G_x$), on voit que les A_x sont en fait des U_x-modules, et un $g\in G$ quelconque définit un isomorphisme $a\to g.a$ du groupe A_x sur $A_{g.x}$ satisfaisant à $g.(ua)=(g.u)(g.a)$ pour $u\in U_x$, $a\in A_x$. Il en résulte facilement que, si on choisit un élément $\xi(y)$ dans toute trajectoire $y\in Y$, et si on pose $U_y=U_{\xi(y)}$, alors les données précédentes sont équivalentes à la donnée d'une famille $(A_y)_{y\in Y}$ de U_y-modules A_y $(=A_{\xi(y)})$.

Les A_x $(x\in y)$ peuvent se déduire de A_y de la façon suivante. Soit $\bar{A}_y$ le G-module *induit* par le G_y-module A_y, i.e. le G-module $\mathrm{Hom}_{G_y}(\mathbf{Z}(G),A_y)$ obtenu à partir du G_y-module A_y par "extension contravariante des scalaires": A_y s'identifie alors à un groupe quotient de $\bar{A}_y$ par un sous-groupe abélien stable par G_y, et $\bar{A}_y$ s'identifie au produit de tout les quotients transformés $g.A_y$ pour $g\in G/G_y$. Introduisant de même le G-module $\bar{O}_y$ induit par $\mathbf{O}_y=\mathbf{O}(\xi(y))$, on constate aussitôt que $\bar{A}_y$ est un $\bar{O}_y$-module s'identifiant au produit des $g.O_y$-modules $g.A_y$ pour $g\in G/G_y$. On a alors des isomorphismes canoniques $g.\mathbf{O}_y=\mathbf{O}(g.\xi(y))$, $g.A_y=A_{g.\xi(y)}$. Désignons par $P(A)$ le G-$\mathbf{O}$-faisceau sur X défini par la famille $A=(A_y)$ de U_y-modules A_y. Soit B un G-$\mathbf{O}$-faisceau quelconque. Un $\mathbf{O}$-homomorphisme d'un G-$\mathbf{O}$-Module B dans $P(A)$ s'identifie à une famille $(v_x)_{x\in X}$ de $\mathbf{O}(x)$-homomorphismes $B(x)\to A_x$ (comme nous l'avions signalé dans 3.1), et ce $\mathbf{O}$-homomorphisme est compatible avec G si et seulement si les v_x "permutent" à G; on voit alors tout de suite qu'il revient au même de se donner un G-$\mathbf{O}$-homomorphisme de B dans P(A), ou une famille $(v_y)_{y\in Y}$ de U_y-homomorphismes $B(\xi(y))\to A_y$. On en conclut aussitôt:

PROPOSITION 5.1.2. *Soit $(A_y)_{y\in Y}$ une famille de U_y-modules injectifs, alors le G-$\mathbf{O}$-Module $P((A_y))$ qu'elle définit est injectif. De plus, tout G-$\mathbf{O}$-Module est isomorphe à un sous-faisceau d'un faisceau du type précédent.*

Ce dernier fait (le plus important pour nous) est immédiat, en plongeant pour tout y, le module ponctuel $B(\xi(y))$ du faisceau donné B dans un U_y-module injectif.

Images directes de G-faisceaux. Soit A un faisceau d'ensembles sur X, rappelons qu'on a défini son image directe $f_*(A)$ comme le faisceau sur Y dont les sections sur l'ouvert $U\subset Y$ sont les sections de A sur $f^{-1}(U)$. Si A est un G-faisceau, alors $\Gamma(f^{-1}(U),A)$ admet G comme groupe d'opérateurs, d'où on conclut facilement que *l'image directe $f_*(A)$ d'un G-faisceau sur X est un G-faisceau sur Y* (rappelons que G opère trivialement sur Y); bien entendu, si A est un G-faisceau de groupes ou d'anneaux etc., il en est de même de $f_*(A)$. Si A est un G-faisceau, nous désignerons par A^G ou $f_*^G(A)$ le faisceau $\Gamma^G(f_*(A))$ des invariants du G-faisceau $f_*(A)$ sur Y, c'est-à-dire le faisceau dont les sections sur un ouvert $U \subset Y$ sont les sections de A sur $f^{-1}(U)$ *invariantes sous* G; évidemment, si A est un G-faisceau de groupes, ou anneaux etc, il en est encore de même de $A^G = f_*^G(A)$. D'ailleurs f_*^G peut être considéré comme un *foncteur* covariant défini sur la catégorie des G-faisceaux sur X, à valeurs dans la catégorie des faisceaux sur Y (considérés comme G-faisceaux où G opère trivialement). Si $\mathbf{O}$ est un G-faisceau d'anneaux et si on désigne par $\mathbf{O}'$ le faisceaux $f_*^G(\mathbf{O})$, alors pour tout G-$\mathbf{O}$-Module A sur X, $f_*(A)$ est un G-$\mathbf{O}'$-Module sur Y. Donc f_* est un *foncteur* covariant de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$ dans $\mathbf{C}^{\mathbf{O}'(G)}$, d'ailleurs additif et exact à gauche comme tout le monde; f_*^G apparait alors comme le foncteur composé $\Gamma^G f_*$ de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$ dans la catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{O}'}$ des $\mathbf{O}'$-Modules sur Y, Γ^G désignant le foncteur $\mathbf{C}^{\mathbf{O}'(G)} \to \mathbf{C}^{\mathbf{O}'}$ associant à un G-$\mathbf{O}'$-faisceau B sur Y le faisceau B^G des germes de sections invariantes sous G. Supposons maintenant pour simplifier que $\mathbf{O}$ donc aussi $\mathbf{O}'$ est le faisceau constant $\mathbf{Z}$ des entiers (ce qui revient à ne pas considérer de faisceau d'anneaux du tout), on a alors :

PROPOSITION 5.1.3 *f_* transforme objets injectifs de $\mathbf{C}^{X(G)}$ en objets injectifs de $\mathbf{C}^{Y(G)}$.*

En effet, il suffit de le voir pour un G-faisceau abélien A défini par une famille (A_y) de G_y-modules injectifs (prop. 5.1.2). Mais reprenant les notations de la construction qui a précédé la prop. 5.1.2, on voit que $f_*(A)$ est le faisceau produit défini par les groupes $\bar{A}_y = \prod_{x \in f^{-1}(y)} A_x$, et la structure de G-faisceau sur $f_*(A)$ est celle définie par la structure de G-module de $\bar{A}_y$. Or ce dernier étant obtenu à partir du G_y-module injectif A_y par extension contravariante des scalaires, est évidemment lui-même injectif [6, II, prop. 6.1.a]. Donc $f_*(A)$ est injectif en vertu de prop. 3.1.2.

COROLLAIRE. *Si A est un G-faisceau abélien injectif, alors* $\Gamma(A)$ *est un G-module injectif, et A^G est un faisceau flasque sur Y.*

En effet, on a $\Gamma(A) = \Gamma(f_*(A))$. $f_*^G(A) = \Gamma^G(f_*(A))$, et il suffit alors d'appliquer le lemme de 4.3 resp. la prop. 4.1.3 (avec $O = \mathbf{Z}(G)$, O le faisceau d'anneaux constant défini par O).

Images inverses et images directes. Soit B un faisceau d'ensembles sur Y (sans opérateurs), alors *son image réciproque* $f^{-1}(A)$ (envisagée dans 3.2) *peut être regardée comme un G-faisceau* de façon naturelle, pour des raisons évidentes de "transport de structure". Une section de B sur un ouvert U définit par image réciproque une section de $f^{-1}(B)$ sur $f^{-1}(U)$ *invariante sous* G, i.e. section de $f_*^G(f^{-1}(B))$, d'où un homomorphisme naturel $B \to f_*^G(f^{-1}(B))$, dont on vérifie aussitôt que c'est là un isomorphisme:

(5.1.1) $$f_*^G(f^{-1}(B)) = B.$$

Inversement, partons d'un G-faisceau A sur X, considérons $f^{-1}(f_*^G(B))$: une section de ce faisceau sur un ouvert V consiste en la donnée d'une fonction

$g(x)$ sur V, dont la valeur en chaque $x \in V$ est un élément de $f_*^G(A)(f(x)) = \lim\limits_{\overrightarrow{u \ni f(x)}} \Gamma(f^{-1}(U), A)^G$, et telle que pour tout $x \in V$ existe un voisinage ouvert $V' \subset V$ de x et une section h de $f_*^G(A)$ sur un voisinage U' de $f(x)$ (i.e. une section invariante h de A sur $f^{-1}(U')$) telle qu'on ait $g(x) = h(x)$ pour $x \in V' \cap f^{-1}(U')$. On en conclut un monomorphisme canonique[10]:

$$f^{-1}(f_*^G(A)) \to A \tag{5.1.2}$$

identifiant $f^{-1}(f_*^G(A))$ *à* un sous-faisceau A' de A. Il résulte de la formule (5.1.1) ci-dessus que l'on a $A' = A$ si et seulement si A est isomorphe à un G-faisceau de la forme $f^{-1}(B)$. S'il en est ainsi alors pour tout $x \in X$, les opérations de G_x dans $A(x)$ sont triviales. La réciproque est d'ailleurs vraie si G satisfait la condition (D) plus bas (cf. 5.3), comme on le vérifie facilement; *si donc en plus les G_x sont réduits à l'identité* (i.e. si aucun $g \neq e$ dans G n'admet de point fixe) *les foncteurs f_*^G et f^{-1} établissent des isomorphismes réciproques l'un de l'autre de la catégorie des G-faisceaux sur X et de la catégorie des faisceaux sur Y.*

EXEMPLES D'IMAGES DIRECTES DE G-FAISCEAUX. Si A est le faisceau constant sur X defini par un ensemble M où G opère trivialement, alors A^G est le faisceau constant sur Y défini par le même ensemble M; mais si G n'opère pas trivialement dans M, et si on n'est pas dans le cas "sans points fixes", alors $f^G(M)$ n'est évidemment plus localement constant en général. Supposons que la condition (D) de 5.3 soit vérifiée, soit A le faisceau des germes d'applications de X dans un ensemble M, alors A^G est le faisceau des germes d'applications de Y dans M. Dans cette correspondance, si X est une variété différentiable (resp. un espace analytique réel, resp. un espace analtique complexe) et si A est le faisceau des germes de fonctions (à valeurs dans un espace de même nature) différentiables (resp. analytiques réelles, resp. analytiques complexes) alors A^G est le faisceau de même nom relatif Y. Ce dernier exemple est particulièrement important, et l'énonce analogue est vrai (par définition d'ailleurs, comme pour les précédents!) en Géométrie Algèbrique abstraite, ou même pour les variétés arithmétiques.

5.2. Les foncteurs $H^n(X; G, A)$ et $\mathbf{H}^n(G, A)$ et les suites spectrales fondamentales. Pour éviter des confusions, nous notons Γ_X et Γ_Y les foncteurs "sections" définis pour des faisceaux sur X resp. sur Y, et Γ^G le foncteur $M \to M^G$ faisant correspondre, à un ensemble M où opère G, l'ensemble des invariants de M. Enfin, si A est un G-faisceau sur X, on pose

$$\Gamma_X^G(A) = \Gamma_X(A)^G \tag{5.2.1}$$

donc par définition, on a les formules

$$\Gamma_X^G = \Gamma^G\Gamma_X = \Gamma_Y f_*^G. \tag{5.2.2}$$

10) Plus généralement, si f est une application continue d'un espace X dans un espace Y, on a, pour les faisceaux A sur X, des monomorphismes fonctoriels $f^{-1}(f_*(A)) \to A$, dont le monomorphisme (5.1.2) se dèduit immêdiatement, grâce à l'injection $A^G \to f_*(A)$.

Nous bornant maintenant à prendre A dans la catégorie $\mathbf{C}^{X(G)}$ des G-faisceaux abéliens sur X, Γ_X^G est un foncteur additif exact à gauche de $\mathbf{C}^{X(G)}$ dans la catégorie $\mathbf{C}$ des groupes abéliens, et f_*^G est un foncteur exact à gauche de $\mathbf{C}^{X(G)}$ dans la catégorie $\mathbf{C}^Y$ des faisceaux abéliens(sans opérateurs) sur Y. On posera alors

$$H^n(X;\, G, A) = R^n\Gamma_X^G(A) \tag{5.2.3}$$

$$\mathbf{H}^n(G, A) = R^n f_*^G(A) \tag{5.2.4}$$

Ainsi, pour un G-faisceau abélien, les $H^n(X;\, G, A)$ sont des groupes abéliens, les $\mathbf{H}^n(G, A)$ sont des faisceaux sur Y. Les uns et les autres forment des foncteurs cohomologiques universels en A, se réduisant pour $n = 0$ à $\Gamma_X^G(A)$ resp. à A^G. Si G opère trivialement sur X, on retrouve les notions introduites dans 4.4. — On voit encore facilement comme dans prop. 3.1.3 que si U est un ouvert de Y, et A un G-faisceau abélien *injectif* sur X, alors sa restriction à $f^{-1}(U)$ est un G-faisceau abélien injectif sur cet espace. On en conclut comme dans 4.2 :

PROPOSITION 5.2.1. *Soit A un G-faisceau abélien sur X, alors pour tout ouvert $U \subset Y$, on a $\mathbf{H}^p(G, A)|U = \mathbf{H}^p(G, A|f^{-1}(U))$.*

C'est pourquoi on se dispense d'indiquer X dans la notation $\mathbf{H}^p(G, A)$. Une réduction plus poussée du calcul des $\mathbf{H}^p(G, A)$ s'obtient par le

COROLLAIRE. *Supposons que $f^{-1}(U)$ soit la réunion d'ouverts $g.V$ ($g \in G/G_0$) disjoints deux à deux, où V est un ouvert de X et G_0 un sous-groupe de G tel que $g_0.\ V = V$ pour $g_0 \in G_0$. Alors $\mathbf{H}^p(G, A)|U = \mathbf{H}^p(G_0, A|V)$ (moyennant l'identification naturelle $U = V/G_0$).*

En vertu de la proposition 2.5.1, on peut supposer $U = Y$, d'où $f^{-1}(U) = X$. On constate alors immédiatement que la catégorie des G-faisceaux sur X est isomorphe à la catégorie des G_0-faisceaux sur V, cet isomorphisme étant compatible avec les foncteurs f_*^G, $f_*^{G_0}$. D'où aussitôt la formule voulue. — Un calcul plus explicite sera donné plus bas. (cf. formule (5.2.11) et théorème 5.3.1).

Les formules (5.2.2) représentent Γ_X^G comme un foncteur composé de deux façons différentes, et dans les deux cas, le théorème 2.4.1 s'applique, grâce au corollaire de prop. 5.1.3. On obtient donc :

THÉORÈME 5.2.1. *Il existe sur la catégorie $\mathbf{C}^{X(G)}$ des G-faisceaux abéliens sur X deux foncteurs spectraux cohomologiques, aboutissant au foncteur gradué $(H^n(X;\, G, A))$, et dont les termes initiaux sont respectivement :*

$$\begin{cases} \mathrm{I}_2^{p,q}(A) = H^p(Y, \mathbf{H}^q(X, A)) \\ \mathrm{II}_2^{p,q}(A) = \mathbf{H}^p(G, H^q(X, A)). \end{cases} \tag{5.2.5}$$

Pour établir la forme explicite de $\mathrm{II}_2^{p,q}(A)$, il faut seulement montrer encore que les foncteurs dérivés de Γ_X, considéré comme foncteur de $\mathbf{C}^{X(G)}$ dans la catégorie $\mathbf{C}^G$ des G-modules, sont bien les $H^q(X, A)$. Or cela résulte immédiatement du fait que tout G-faisceau abélien peut se plonger dans un G-faisceau abélien flasque (comme nous avons vu au numéro précédent), qui annule donc les $H^q(X, A)$ pour $q > 0$.

Ces suites spectrales donnent lieu tout d'abord à des "edge-homomorphismes" importants :

(5.2.6) $$H^n(Y, A^G) \to H^n(X; G, A) \to H^0(Y, \mathbf{H}^n(G, A)),$$

(5.2.7) $$H^n(G, H^0(X, A)) \to H^n(X; G, A) \to H^n(X, A)^G.$$

La deuxième application (5.2.6) s'interprète immédiatement si on note qu'en vertu de lemme 3.7.2, $\mathbf{H}^n(G, A)$ est le faisceau sur Y associé au préfaisceau formé par les $H^n(f^{-1}(U); G, A)$. Le composé du premier homomorphisme de la première ligne avec le deuxième homomorphisme de la deuxième ligne est l'homomorphisme f^* associé à l'injection naturelle (5.1.2) de $f^{-1}(A^G)$ dans A (cf. 3.2).

Les suites spectrales du théorème 5.2.1 définissent aussi deux suites exactes à 5 termes :

(5.2.8) $$0 \to H^1(Y, A^G) \to H^1(X; G, A) \to H^0(Y, \mathbf{H}^1(G, A)) \to H^2(Y, A^G) \\ \to H^2(X; G, A),$$

(5.2.9) $$0 \to H^1(G, \Gamma A) \to H^1(X; G, A)) \to H^1(X, A)^G \to H^2(G, \Gamma A) \\ \to H^2(X; G, A).$$

Il y a une troisième façon de représenter Γ_X^G comme un foncteur composé, savoir $\Gamma_X^G = \Gamma_Y^G f_*$, et le théorème 2.4.1 est encore appliquable en vertu de proposition 5.1.3. Donc, le foncteur gradué $(H^n(X; G, A))$ est aussi l'aboutissement d'une troisième suite spectrale dont le terme initial est

$$E_2^{p,q} = H^p(Y; G, R^q f_*(A)).$$

Cette suite spectrale définit des homomorphismes fonctoriels

(5.2.10) $$H^n(Y; G, f_*(A)) \to H^n(X; G, A).$$

L'intérêt de cette suite spectrale est limitée, car il apparait qu'elle est pathologique dans les cas où elle n'est pas triviale, c'est-à-dire quand on n'est pas dans les conditions de la proposition suivante :

PROPOSITION 5.2.2. *Supposons le G-faisceau abélien A tel que* $R^q f_*(A) = 0$ *pour* $q > 0$. *Alors les homomorphismes* (5.2.10) *sont des isomorphismes, de plus les deux suites spectrales du théorème* 5.2.1 *s'identifient alors aux deux suites spectrales correspondantes pour le G-faisceau* $f_*(A)$ *sur* Y, *et on a*

(5.2.11) $$\mathbf{H}^q(G, A) = \mathbf{H}^q(G, f_*(A)).$$

La premère assertion résulte aussitôt de la forme du terme initial de la suite spectrale E définissant (5.2.10). Les autres assertions résultent de la définition explicite des fermes qu'il s'agit de comparer, si on note que pour toute résolution injective $\mathbf{C}(A)$ de A dans $\mathbf{C}^{X(G)}$, le complexe $f_*(C(A))$ est une *résolution* de $f_*(A)$ (c'est ce que signifie l'hypothèse $R^q f_*(A) = 0$ pour $q > 0$!) qui est injective en vertu de proposition 5.1.3. — Notons que nous avions implicitement defini les $R^q f^*(A)$ comme dérivés droits de f_* considére comme foncteur de $\mathbf{C}^{X(G)}$ dans $\mathbf{C}^{Y}$; mais en vertu de calcul de ces foncteurs dérivés par le le mme 3.7.2, et se rappelant qu'un objet injectif de $\mathbf{C}^{X(G)}$ est un faisceau flasque, on voit qu'on trouve le même résultat que si on considère f_* comme un foncteur de $\mathbf{C}^X$ dans $\mathbf{C}^Y$, i.e. $R^q f_*(A)$ *est le faisceau sur* Y *associé au préfaisceau formé des* $H^q(f^{-1}(U), A)$.

L'hypothèse de la prposition 2.5.2 doit être regardée comme un équivalent cohomologique de l'hypothèse que G est un "groupe discontinu d'opérateurs" sur X. Un autre cas important est celui oû $\mathbf{H}^q(G, A) = 0$ pour $q > 0$, hypothèse qui doit être regardée comme un équivalent cohomologique de la condition usuelle que "G opère sans points fixes":

PROPOSITION 5.2.3. *Supposons que* $\mathbf{H}^q(G, A) = 0$ *pour* $q > 0$. *Alors* $H^n(X; G, A)$ *est isomorphe à* $H^n(Y, A^G)$, *donc* $H^*(Y, A^G)$ *est l'aboutissement d'une suite spectrale cohomologique dont le terme initial est* $II_2^{p,q}(A) = H^p(G, H^q(X, A))$.

C'est une conséquence immédiate de la première suite spectrale du théorème 2.5.1. On obtient ainsi la forme classique de la théorie des espaces à opérateurs [4]. Nous donnerons au numéro suivant des conditions de validité de cette proposition, G étant un "groupe discontinu sans point fixes d'opérateurs dans X". D'autres conditions de validité sont liées à la caractéristique d'un corps de base k pour le faisceau A et les ordres des stabilisateurs G_y; un cas particulièrement simple est le suivant(qui se démontre d'ailleurs directement très facilement, et est sans doute bien connu):

COROLLAIRE. *Supposons outre* $\mathbf{H}^q(G, A) = 0$ *pour* $q > 0$) *que* G *soit un groupe fini d'ordre* m, *que l'espace* X *soit séparé, et que la multiplic ation par* m *dans* A *soit un automorphisme de* A(*par exemple* A *est un faisceau d'espaces vectoriels sur un corps de caractéristique ne divisant pas* m). *Alors on a* $H^n(Y, A^G) = H^n(X, A)^G$, *les deux membres étant isomorphes à* $H^n(X; G, A)$.

Un dernier cas particulier intéressant est le suivant:

PROPOSITION 5.2.4. *Supposons* $H^q(X; A) = 0$ *pour* $q > 0$, *alors* $H^n(X; G, A) = H^n(G, \Gamma(A))$, *et par suite* $H^*(G, \Gamma(A))$ *est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme initial est* $I_2^{p,q}(A) = H^q(Y, \mathbf{H}^q(G, A))$.

Cette proposition peut être utilisée pour le calcul de la cohomogie de certains groupes, par exemple la cohomologie à coéfficients constants de divers groupes modulaires à une variable [10].

REMARQUES. 1. Supposons qu'on se donne un G-faisceaux $\mathbf{O}$, et qu'on se borne à considérer des G-$\mathbf{O}$-Modules, Γ_X^G étant donc considéré comme un foncteur de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$ dans la catégorie des modules sur $\Gamma(\mathbf{O})^G$. Alors ses foncteurs dérivés coïncident avec les foncteurs $H^p(X; G, A)$ précédents, comme il résulte aussitôt du fait que tout objet injectif de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$ est annulé par les $H^n(X; G, A)$ pour $n > 0$. Ce dernier fait sera prouvé dans le lemme 5.6.1, plus bas (où on remplace B par A, par $\mathbf{O}$).

2. On peut, des deux suites exactes (5.2.8) et (5.2.9), éliminer $H^*(X; G, A)$ de façon à obtenir des relations entre la cohomologie de Y, celle de X

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & & \\
 & & A' \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "u"] & & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[dr, "u'"'] & H^1 \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r, "\gamma'"] & C \arrow[r, "\delta'"] & D \\
 & & B' \arrow[d, "\gamma"] & & & \\
 & & C' \arrow[d, "\delta"] & & & \\
 & & D' & & &
\end{tikzcd}$$

et celle de G. De façon générale, supposons données deux suites exactes à 5 termes comme dans le cas actuel (cf. diagramme ci-dessous). On a posé $u = \beta'\alpha$, $u' = \beta\alpha'$. On a $A \cap A' =$ Ker $u =$ Ker u'. On a des homomorphismes naturels

$$\beta\beta'^{-1}: \text{Ker}\,\gamma' \to \text{Coker}\,u',$$
$$\beta'\beta^{-1}: \text{Ker}\,\gamma \to \text{Coker}\,u.$$

Ces homomorphismes donnent lieu aux deux suites exactes suivantes (où H^1 ne figure plus):

$$(5.2.12)\qquad \begin{cases} 0 \to \text{Ker}\ u \to A' \to \text{Ker}\ \gamma' \to \text{Coker}\ u' \to C' \to D', \\ \qquad\ \ \| \\ 0 \to \text{Ker}\ u' \to A \to \text{Ker}\ \gamma \to \text{Coker}\ u \to C \to D. \end{cases}$$

On trouve par exemple: Soit u l'homomorphisme naturel de $H^1(Y, A^G)$ dans $H^1(X, A)^G$, u' l'homomorphisme naturel de $H^1(G, \Gamma(A))$ dans $H^0(Y, \mathbf{H}^1(G, A))$; alors *le noyau de u est isomorphe à celui de u', tandis que l'image de u est isomorphe au noyau de l'homomorphisme naturel de* $\text{Ker}(H^1(X, A)^G \to H^2(G, \Gamma(A)))$ *dans* Coker u'.

3. Les conditions de la proposition 5.2.2. sont vérifiées dans la plupart des cas qu'on rencontre dans la nature. Son intérêt réside surtout dans la formule (5.2.11), qui, lorsque G est fini, peut aussi s'écrire

$$(5.2.11\text{ bis})\qquad \mathbf{H}^q(G, A)(y) = \mathbf{H}^q(G, f_*(A)(y)) \qquad y \in Y$$

et donne un calcul explicite des faisceaux $\mathbf{H}^q(G, A)$. La proposition 5.2.2 est appliquable chaque fois que G est fini et X séparé. Un autre cas important est celui où G est un groupe fini d'automorphismes d'une variété algébrique abstraite X, tel que $Y = X/G$ soit une variété algébrique (par exemple G est le groupe de Galois d'un revêtement X, ramifié ou non, d'une variété normale Y): les conditions de la proposition 5.2.2 sont alors vérifiées si A est un *G-faisceau algébrique cohérent*, ou si A est le faisceau multiplicatif $\mathbf{O}_X^*$ des germes de fonctions régulières inversibles sur X. De plus, si X est non ramifiée sur Y, alors on montre que $\mathbf{H}^n(G, A) = 0$ pour $n > 0$, quand A est un G-faisceau algébrique cohérent, ce qui permet d'appliquer prop. 5.2.3. Dans le même cas, on peut aussi montrer que $\mathbf{H}^1(G, \mathbf{O}_X^*) = 0$. On pourrait aussi considérer des variétés arithmétiques, les mêmes résultats sont valables.

5.3. Cas d'un groupe discontinu d'homéomorphismes. Pour abréger et par abus de langage, nous dirons que G est un *groupe discontinu d'homéomorphismes de* X s'il satisfait à la condition suivante:

(D) *Pour tout* $x \in X$, *le stabilisateur* G_x *de* x *est fini, et il existe un voisinage* V_x *de* x *tel que pour tout* $g \in G$ *non dans* G_x, *on ait* $g.V_x \cap V_x = \phi$.

On peut alors supposer évidemment V_x ouvert, et de plus $g.V_x = V_x$ pour $g \in G_x$ (en remplaçant au besoin V_x par l'intersection des $g.V_x$, $g \in G_x$). La condition (D) est vérifiée par exemple si G est fini et de plus X séparé, comme on voit aussitôt. Si X est une variété algébrique irréductible muni de sa topologie de Zariski et G un groupe fini d'automorphismes de X, la condition (D) n'*est pas* vérifiée (sauf si G opère trivialement).

THÉORÈME 5.3.1. *Supposons la condition (D) vérifiée. Soit A un G-faisceau abélien sur X, soit $y \in Y$, x un élément de $f^{-1}(y)$. On a alors des isomorphismes canoniques*

$$\mathbf{H}^n(G, A)(y) = H^n(G_x, A(x)). \tag{5.3.1}$$

Prenant V_x comme dans l'énoncé de la condition (D), et de plus V_x ouvert et stable par G_x, on peut appliquer le corollaire à la proposition 5.2.1, ce qui nous ramène au cas où $G = G_x, X = V_x$ donc où G est *fini*. Montrons qu'alors $R^q f_*(A) = 0$ pour $q > 0$. On a pour tout $y \in Y$:

$$R^q f_*(A)(y) = \varinjlim H^q(f^{-1}(U), A),$$

la limite étant prise suivant les voisinages ouverts U de y. Or x et V_x étant pris comme ci-dessus, et se bornant aux $U \subset f(V_x)$, on voit que $f^{-1}(U)$ est réunion finie d'ouverts disjoints deux à deux $g.U_x$ ($g \in G/G_x$), où $U_x = V_x \cap f^{-1}(U)$, donc $H^q(f^{-1}(U), A)$ est somme directe d'un nombre fini de groupes isomorphes à $H^q(U_x, A)$. Quand U parcourt un système fondamental de voisinages de y, U_x parcourt un système fondamental de voisinages de x, donc on obtient pour $R^q f_*(A)$ la somme directe d'un nombre fini de groupes isomorphes à $\varinjlim H^q(U_x, A)$; or ce dernier est nul pour $q > 0$, en vertu du lemme 3.8.2.

On a donc bien $R^q f_*(A) = 0$ pour $q > 0$, donc en vertu de proposition 5.2.2 le premier membre de (5.3.1) s'identifie à $\mathbf{H}^n(G, f_*(A))(y)$, qui, G étant fini, est ègal à $H^n(G, f_*(A)(y))$ (comme on l'a signalé dans 4.4). Se rappelant qu'on pouvait supposer $X = V_x$, donc que $f^{-1}(y)$ est réduit à x, on a alors $f_*(A)(y) = A(x)$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Supposons que pour tout $x \in X$, l'ordre n_x du stabilisateur G_x soit tel que la multiplication par n_x soit un automorphisme du groupe $A(x)$. Alors $H^*(X; G, A) = H^*(Y, A^G)$, et par suite $H^*(Y, A^G)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme initial est $II_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, A))$.*

En effet, le théorème 3.5.1 donne $\mathbf{H}^q(G, A) = 0$ pour $q > 0$, donc on est dans les conditions d'application de la proposition 5.2.3. Le corollaire précédent est surtout intéressant dans le cas où A est un faisceau d'espaces vectoriels sur un corps de caractéristique p ne divisant aucun des n_x (ce qui est toujours le cas en caractéristique 0). Quand il n'y a pas de corps de base, on pourra utiliser la variante suivante:

COROLLAIRE 2. *Supposons que les ordres n_x des G_x admettent un ppcm n; soit P l'ensemble des diviseurs premiers de n, $\mathbf{C}(P)$ là catégorie des groupes abéliens dont chaque élément a un ordre fini n'ayant pas d'autres diviseurs premiers que des $p \in P$. Alors avec la terminologie introduite dans 1.11, $H^*(X; G, A)$ est isomorphe mod $\mathbf{C}(P)$ à $H^*(Y, A^G)$, donc ce dernier est l'aboutissement mod $\mathbf{C}(P)$ d'une suite spectrale cohomologique dont le terme initial est $H^p(G, H^q(X, A))$.*

En effet, réduisons mod $\mathbf{C}(P)$ les suites spectrales du théorème 5.2.1.

On a $I_2^{p,q} = 0 \bmod \mathbf{C}(P)$ pour $q > 0$, car en vertu du théorème 5.3.1 $\mathbf{H}^q(G, A)$ est un faisceau annulé par n, donc $H^p(X, \mathbf{H}^q(G, A))$ est annulé par n pour tout p, donc est nul mod. $\mathbf{C}(P)$. Le corollaire 2 en résulte aussitôt.

Si les n_x sont tous réduits à 1, c'est à dire si tout $g \in G$, $g \neq e$, n'a pas de point fixe (on dit alors simplement que G *opère sans points fixes*) on trouve $\mathbf{H}^n(G, A) = 0$ pour $n > 0$, donc $H^*(X, G, A) = H^*(Y, A^G)$, ce qui est aussi évident à priori, à cause de l'isomorphisme signalé à la fin de 5.1 entre la catégorie des faisceaux sur Y et la catégorie des G-faisceaux sur X, quand G est un groupe discret d'homéomorphismes sans points fixes. On trouve donc dans ce cas l'énoncé classique:

COROLLAIRE 3. *Si G opère "sans points fixes", alors $H^*(Y, A^G)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale cohomologique dont le terme initial est $H^p(G, H^q(X, A))$.*

REMARQUE. Par définition, la deuxième suite spectrale du théorème 5.2.1. s'obtient en prenant une résolution $C(A)$ de A par des faisceaux Γ_X-acycliques, et en prenant la deuxième suite spectrale du foncteur Γ^G par rapport au complexe $\Gamma_X(C(A))$. En général, la première suite spectrale de Γ^G par rapport à ce complexe ne s'identifie évidemment pas à la première suite spectrale du théorème 5.2.1 (prendre une résolution injective de A !). Il en est cependant bien ainsi si on prend pour $C(A)$ la ***résolution canonique*** de A (cf. 3.3), comme on voit par un raisonnement analogue à celui de la proposition 4.3.2. Il en est encore ainsi si X et Y sont paracompacts et si on prend pour $C(A)$ une résolution de Cartan de A, i.e. $C(A) = A \otimes_Z C$, où C est un "faisceau fondamental" au sens de Cartan-Leray, comme on peut montrer par des raisonnements asses différents (nous n'aurons pas à nous servir de ce fait). Par suite, la suite spectrale I est bien la suite spectrale de [10] dont le terme initial avait été laissé non explicité.

5.4. Transformation de la première suite spectrale. Nous supposons toujours la condition (D) du numéro précédent satisfaite (bien que ce ne soit pas absolument essentiel). Soit Y_0 une partie fermée de Y contenant les supports des $\mathbf{H}^n(G, A)$ pour $n > 0$ (il suffit par exemple, en vertu du théorème 5.3.1, que Y_0 contienne l'ensemble des $y \in Y$ tels que $G_y \neq e$). Soit $X_0 = f^{-1}(Y_0)$, soit V le complémentaire de Y_0 et U le complémentaire de X_0. Considérons les suites exactes:

$$0 \to A_U \to A \to A_{X_0} \to 0,$$
$$0 \to (A^G)_V \to A^G \to (A^G)_{Y_0} \to 0.$$

Comme on a manifestement $(A_U)^G = (A^G)_V$, on obtient un diagramme commutatif de suites de cohomologie

$$(5.4.1) \quad \begin{array}{ccccccccc} \ldots & H^n(Y, (A^G)_V) & \to & H^n(Y, A^G) & \to & H^n(Y, (A^G)_{Y_0}) & \to & H^{n+1}(Y, (A^G)_V) & \to \ldots \\ & \downarrow\wr & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr & \\ \ldots & H^n(X; G, A_U) & \to & H^n(X: G, A) & \to & H^n(X; G, A_{X_0}) & \to & H^{n+1}(X; G, A_U) & \to \ldots \end{array}$$

Or il résulte de l'hypothèse sur Y_0 que $\mathbf{H}^n(G, A_U) = 0$ pour $n > 0$, car c'est évidemment le cas dans l'ouvert V, mais c'est vrai aussi sur Y_0, car en vertu de théorème 5.3.1. on a $\mathbf{H}^n(G, A_U)(y) = \mathbf{H}^n(G, A_U(y))$ pour $y \in Y_0$. En vertu de proposition 5.2.3, l'homomorphisme $H^n(Y, (A^G)_Y) \to H^n(X; G, A_U)$ est donc un isomorphisme pour tout n. On voit tout aussi facilement que $H^n(X; G, A_{X_0})$ s'identifie à $H^n(X_0; G, A)$, de plus on sait que $H^n(Y, (A^G)_{Y_0}) = H^n(Y_0, A^G)$. On déduit alors du diagramme précédent, par un "diagram-chasing" évident, une suite d'homomorphismes

$$(5.4.2) \qquad \to H^{n-1}(X, G, A) \xrightarrow{\beta^{n-1}} H^{n-1}(X_0; G, A)/\mathrm{Im}\ H^{n-1}(Y_0, A^G) \xrightarrow{\partial} H^n(Y, A^G)$$
$$\xrightarrow{\alpha^n} H^n(X; G, A) \xrightarrow{\beta^n} H^n(X_0; G, A)/\mathrm{Im}\ H^n(Y_0, A^G) \to$$

qui est un complexe (le produit de deux homomorphismes consécutifs est nul), et exacte partout sauf éventuellement aux termes $H^n(Y, A^G)$, le défaut d'exactitude Ker α^n/Im ∂ en ce terme étant isomorphe canoniquement au noyau de l'homomorphisme $H^n(Y_0, A^G) \to H^n(X_0; G, A)$. On obtient ainsi :

PROPOSITION 5.4.1. *La suite d'homomorphismes* (5.4.2) *définit sur* $H^n(Y, A^G)$ *une suite de composition de longueur* 3, *dont les quotients successifs sont isomorphes respectivement à* Coker $\beta^{n-1} = H^{n-1}(X_0; G, A)/(\mathrm{Im}\ H^{n-1}(X; G, A) + \mathrm{Im}\ H^{n-1}(Y_0, A^G))$, *à* Ker $(H^n(Y_0, A^G) \to H^n(X_0; G, A))$ *et à* Ker $\beta^n \subset H^n(X; G, A)$.

On peut donc dire que l'utilisation de la première suite spectrale nous donne un moyen de ramener la détermination de $H^*(Y, A^G)$ à une bonne connaissance de $H^*(X,G,A)$, $H^*(X_0\ G.A)$, $H^*(Y_0.A^G)$ et des homomorphismes naturels $H^*(X; G, A) \to H^*(X_0; G, A) \leftarrow H^*(Y_0, A^G)$. Or la détermination des deux premiers groupes pourra être tenté par utilisation de la *deuxième* suite spectrale, tandis que le calcul de $H^*(Y_0, A^G)$ sera souvent possible si on a pu choisir Y_0 assez petit. Un cas particulièment simple et important est donné par le

COROLLAIRE. *Supposons que G opère trivialement sur X_0 (donc G est fini), que A soit un faisceau d'espaces vectoriels sur un corps k, et que G opère trivialement sur $A|X_0$. Alors la suite* (5.2.4) *est exacte, et $H^n(X_0, G, A)$ s'identifie canoniquement à* $\bigoplus_{p+q=n} H^p(G, K) \otimes H^q(X_0, A)$.

En effet, la dernière assertion est un cas particulier de la dernière assertion de théorème 4.4.1. Par suite, l'homomorphisme canonique de $H^n(Y_0, A^G) = H^n(X_0, A)$ dans $H^n(X_0; G, A)$ est injectif, donc la suite (5.2.4) est exacte.

REMARQUES. Supposons que G soit un groupe fini d'ordre premier, alors en prenant pour X_0 l'ensemble des points de X fixes sous G, et $Y_0 = f(X_0)$, Y_0 satisfait à la condition énoncée au début de ce numéro. Si alors A est un faisceau d'espaces vectoriels provenant d'un faisceau sur Y (i.e. tel que G opère trivialement sur $A|X_0$) on est dans les conditions d'application du corollaire 1. On retrouve par exemple très facilement le théorème de P. A. Smith relatif au cas oû X est une sphère homologique mod. p de dimension finie (p étant l'ordre de G) : alors X_0 est une sphère homologique mod. p. D'ailleurs cette démonstration "naturelle" par les suites spectrales générales est en fait très voisine de celle de Borel [2]; bien entendu, l'hypothèse de compacité faite dans [2] est entiérement inutile. On trouve encore plus facilement, comme application du corollaire précédent, que si un groupe fini G d'ordre premier p opère dans un espace X de dimension finie qui est acyclique mod. p, alors l'ensemble X_0 des points fixes et l'espace quotient X/G sont acycliques mod. p. Il en résulte que si X est acyclique pour un corps de coéfficients k (de caractéristique quelconque, le cas de caractéristique $\neq p$ étant trivial), il en est de même de X/G; et k étant arbitraire, cet énoncé reste valable en y remplaçant k par $\mathbf{Z}$. Une récurrence immédiate montre que ces résultats relatifs à X/G sont encore valables si on suppose seulement G fini résoluble. Enfin, les calculs de ce numéro sont aussi utiles dans l'étude des puissances de Steenrod dans les faisceaux et la cohomologie des puissances symétriques d'un espace. Ce sont d'ailleurs des calculs analogues dans un manuscript de R. Godement sur les puissances de Steenrod (non publié), qui ont inspiré le présent numéro.

5.5. **Calcul des $H^n(X; G, A)$ par les recouvrements.** Nous aurons à nous servir de résultats auxiliaires :

LEMME 5.5.1. *Soient $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ trois catégories abéliennes, on suppose que dans les deux premières tout objet est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif. Soient F et G des foncteurs covariants de $\mathbf{C}_1$ dans $\mathbf{C}_2$ et de $\mathbf{C}_2$ dans $\mathbf{C}_3$ respectivement, on suppose que F transforme objets injectifs en objets G-aycliques. Soit enfin $\mathbf{K}$ un foncteur covariant de $\mathbf{C}_1$ dans la catégorie $\mathbf{K}(\mathbf{C}_2)$ des complexes à degrés positifs dans $\mathbf{C}_2$, satisfaisant aux deux conditions* (i) $H^0\mathbf{K}(A) = F(A)$ *(isomorphisme fonctoriel)* (ii) $\mathbf{K}(A)$ *est aylique en dimensions $n > 0$ quand A est injectif. Sous ces conditions, il existe sur $\mathbf{C}_1$ un foncteur spectral cohomologique, aboutissant au foncteur gradué $(R^n(GF)(A))$, et dont le terme initial est*

$$E_2^{p,q}(A) = \mathbf{R}^pG(R^q\mathbf{K}(A)) \tag{5.5.1}$$

Désignons par H^0 le foncteur covariant $L \to H^0(L)$ de $K(\mathbf{C}_2)$ dans $\mathbf{C}_2$, on a alors $GF = G(H^0\mathbf{K}) = (GH^0)\mathbf{K}$. Or si A est injectif, $\mathbf{K}(A)$ est (GH^0)-ayclique, i.e. on a $\mathbf{R}^nG(\mathbf{K}(A)) = 0$ pour $n > 0$; en effet, $\mathbf{K}(A)$ est une résolution de $F(A)$ en vertu de (i) et (ii), donc $\mathbf{R}^nG(\mathbf{K}(A)) = R^nG(F(A))$ et le dernier membre est nul en vertu de l'hypothèse faite sur F. On peut donc appliquer le théorème 2.4.1 au foncteur composé $(GH^0)\mathbf{K}$, ce qui donne le foncteur spectral du lemme.

LEMME 5.5.2. $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, F$ *et* G *étant comme dans le lemme précédent, il existe un foncteur spectral cohomologique sur la catégorie* $\mathbf{K}(\mathbf{C}_1)$ *des complexes* C *à degrés positifs dans* $\mathbf{C}_1$, *aboutissant au foncteur gradué* $(\mathbf{R}^n(GF)(C))$, *et dont le terme initial est*

$$E_2^{p,q}(C) = \mathbf{R}^pG(R^qF\,(C)). \tag{5.5.2}$$

Indiquons par une barre au dessus d'un foncteur, le foncteur obtenu par "prolongement" aux catégories de complexes à degrés positifs. On a alors $\mathbf{R}^n(GF) = R^n(H^0\overline{GF}) = R^n((H^0\overline{G})\overline{F})$. Or le foncteur $\overline{F}: \mathbf{K}(\mathbf{C}_1) \to \mathbf{K}(\mathbf{C}_2)$ transforme objets injectifs en objets $(H^0\overline{G})$-acycliques, en d'autres termes, si C est un objet injectif de $\mathbf{K}(\mathbf{C}_1)$, alors $\mathbf{R}^nG(F(C)) = 0$ pour $n > 0$; en effet, d'après la caractérisation des objets injectifs dans $\mathbf{K}(\mathbf{C}_1)$ indiquée dans 2.4, C est acyclique en dimensions > 0 et se "décompose", de plus les C^i et $Z^i(C)$ sont injectifs, d'où il résulte d'abord que $\overline{F}(C)$ est une résolution de $F(Z^0(C))$ d'ou $\mathbf{R}^nG(\overline{F}(C)) = R^nG(F(Z^0(C)))$, et comme $Z^0(C)$ est injectif le deuxième membre est nul d'après l'hypothèse sur F. Ainsi, on peut appliquer le théorème 2.4 au foncteur composé $(H^0\overline{G})\overline{F}$, ce qui donne le foncteur spectral de l'énoncé, compte tenu que $R^qF = \overline{R^qF}$ (relation qui résulte immédiatement des définitions).

COROLLAIRE. *Sous les conditions précédentes, soit C une résolution d'un objet $A \in \mathbf{C}_1$. Alors il existe une suite spectrale cohomologique, aboutissant à l'objet gr dué $(R^n(GF)(A))$, et dont le terme initial est donné dans* (5.5.2).

En effet, on a ici $\mathbf{R}^n(GF)(C) = R^n(GF)(A)$.

Revenons à l'espace X avec le groupe d'opérateurs G. Soit $\mathbf{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X, G opérant dans l'ensemble d'indices I de telle façon qu'on ait $g.U_i = U_{g.i}$ pour tout $i \in I$: on dira que $\mathbf{U}$ est un *G-recouvrement*. Si P est un préfaisceau abelien sur X dans lequel G opère, alors le complexe $C(\mathbf{U}, P)$ des cochaines de $\mathbf{U}$ à coéfficients dans P peut-être considéré comme un complexe de G-groupes de façon évidente. Nous poserons

(5.5.3) $$H^n(\mathbf{U}\,; G, P) = \mathbf{R}^n\Gamma^G(C(\mathbf{U}, P))$$

où le deuxième membre peut donc aussi s'expliciter comme le groupe $H^n(C(G, C(\mathbf{U}, P)))$, $C(G, C(\mathbf{U}, P))$ étant le bicomplexe formé des cochaines de G à valeurs dans le complexe $C(\mathbf{U}, P)$, bicomplexe qu'on pourra noter $C(\mathbf{U}\,; G, P)$:

(5.5.3 bis) $$H^n(\mathbf{U}\,; \mathrm{G}, P) = H^n(C(\mathbf{U}\,; G, P)).$$

Supposons d'abord le G-recouvrement $\mathbf{U}$ *ouvert*. Nous allons appliquer le lemme 5.5.1 en prenant les catégories $\mathbf{C}^{X(G)}$, $\mathbf{C}^G$ (catégorie des G-modules), $\mathbf{C}$ (catègorie des groupes abéliens), et les foncteurs Γ_X et Γ^G, et posant enfin $\mathbf{K}(A) = C(\mathbf{U}, A)$. Γ_X transforme bien objets injectifs en objets Γ^G-acycliques (corollaire à la prop. 5.1.3), et les conditions (i) et (ii) du lemme sont satisfaites, (i) parce que $\mathbf{U}$ est ouvert, et (ii) en vertu de ce qui a été dit dans 3.8 (deuxième alinéa). Il reste à expliciter $R^q\mathbf{K}(A)$, le calcul est immédiat (et a d'ailleurs été fait dans 3.8) on trouve $R^q\mathbf{K}(A) = C(\mathbf{U}, H^q(A))$, où $H^q(A)$ désigne le préfaisceau $H^q(A)(V) = H^q(V, A)$. On a donc prouvé:

THÉORÈME 5.5.3. *Soit X un espace muni d'un groupe G d'opérateurs, soit $\mathbf{U} = (U_i)$ un G-recouvrement ouvert de X. Alors il existe sur la catégorie $\mathbf{C}^{X(G)}$ des G-faisceaux abéliens sur X, un foncteur spectral cohomologique, aboutissant au foncteur gradué $(H^n(X\,; G, A))$, et dont le terme initial est*

(5.5.4) $$E_2^{p,q}(A) = H^p(\mathbf{U}\,; G, H^q(A))$$

(*où $H^q(A)$ est le préfaisceau $H^q(A)(V) = H^q(V, A)$ sur X*).

On en conclut comme d'habitude des "edge-homomorphisms"

(5.5.5) $$H^n(U\,; G, A) \to H^n(X\,; G, A)$$

et une suite exacte à 5 termes, montrant entre autres que *l'homomorphisme* *précédent est injectif si* $n = 1$. De plus:

COROLLAIRE 1. *Si les* $U_{i_0 \ldots i_p}$ *sont tous A-acycliques, alors les homomorphismes* (5.5.5) *sont des isomorphismes.*

COROLLAIRE 2. *Le théorème précédent est encore valable si* **U** *est un G-recouvrement fermé, pourvu que l'on soit dans l'un ou l'autre cas suivant*: *a*) **U** *est localement fini et X paracompact, b*) **U** *est fini.*

Dans le cas a), en vertu de ce qui est censé avoir été vu dans 3.8 (voir remarque de 3.8), les conditions (i) et (ii) du lemme 5.5.1 sont encore satisfaites (pour (i), c'est d'ailleurs trivial sans hypothèse de paracompacité, grâce au fait que **U** est localement fini), et la formule $R^q\mathbf{K}(A) = C(\mathbf{U}, H^q(A))$ est encore valable. Dans le cas b), il faut suivre la méthode de Godement (qu'il développe pour G réduit à l'unité), et que nous allons esquisser, à cause des possibilités d'application à la Géométrie Algébrique abstraite. Tout d'abord, on introduit, suivant une idée de P. Cartier, le complexe de faisceaux $\mathbf{C}(\mathbf{U}, A)$, dont le complexe des sections sur un ouvert V quelconque est par définition $C(\mathbf{U}|V, A|V)$ (où le signe $|$ indique comme toujours qu'on prend la restriction à l'ensemble indiqué après ce signe). On prouve que c'est là une *résolution* de A (voir livre de Godement [9] pour des détails). Nous allons lui appliquer le corollaire au lemme 5.5.2 (les lettres dans l'énoncé de ce lemme ayant la même signification que plus haut). Il reste seulement à prouver que $R^qF(C) = H^q(X, \mathbf{C}(\mathbf{U}, A))$ est isomorphe (fonctoriellement) à $C(\mathbf{U}, H^q(A))$. Cela n'offre pas de difficulté, grâce au fait que **U** est *fini*, et en utilisant le théorème 3.5.1.

Nous dirons qu'un *G-recouvrement* $\mathbf{U} = (U_i)_{i \in I}$ est "*sans point fixe*" si G opère dans I sans point fixe, i.e. si $g \neq e$ implique $g.i \neq i$ pour tout i. Si alors P est un G-préfaisceau quelconque, alors pour tout n, on a

$$(5.5.6) \qquad C^n(\mathbf{U}, P) = \prod_{(i_0, \ldots, i_n)} \prod_{g \in G} P(g.U_{i_0 \ldots i_p}),$$

le premier signe $\prod$ étant étendu à un système complet de représentants $(i_0, \ldots, i^n)$ de I^{n+1}/G. Dans le deuxième produit, tous les termes sont canoniquement isomorphes à $P(U_{i_0 \ldots, i_n})$, de sorte que ce produit s'identifie au groupe des applications de G dans le groupe fixe $P(U_{i_0 \ldots i_n})$, G y opérant par translations gauches. Il est bien connu qu'un tel G-module est Γ^G-acyclique, donc il en est de même de $C^n(\mathbf{U}, P)$. On fera cependant attention que la formule (5.5.6) n'est valable qu'en supposant que $C(\mathbf{U}, P)$ désigne le complexe des cochaines *quelconques* (non nécessairement alternées) de **U** à coéfficients dans P (alors que les considérations antérieures valaient indifféremment pour les cochaines quelconques, ou les cochaines alternées). En utilisant la première suite spectrale d'hyperhomologie du foncteur Γ^G par rapport au complexe $C(\mathbf{U}, P)$, on trouve alors:

PROPOSITION 5.5.4. *Si* **U** *est un G-recouvrement sans points fixes, alors on a pour tout G-préfaisceau P*:

$$(5.5.7) \qquad H^n(\mathbf{U}, G, P) = H^n((C(\mathbf{U}, P)^G)$$

où $C(\mathbf{U}, P)$ désigne le complexe (à opérateurs) des cochaines quelconques (non nécessairement alternées) de $\mathbf{U}$ *à coéfficients dans P.*

Conjuguant avec le corollaire 1 du théorème 5.5.3, il vient:

COROLLAIRE. $\mathbf{U}$ *étant un G-recouvrement sans point fixe, on suppose que* $\mathbf{U}$ *est ouvert, ou que* $\mathbf{U}$ *est fermé et de plus X paracompact ou* $\mathbf{U}$ *fini. Si A est un G-faisceau tel que* $H^n(U_{i_0\dots i_p}, A) = 0$ *pour tout* $(i_0\dots i_p) \in I^{p+1}$ *et tout* $n > 0$, *alors on a des isomorphismes canoniques*:

$$H^n(X; G, A) = H^n(C(\mathbf{U}, A)^G).$$

Nous allons expliciter le complexe $C(\mathbf{U}, P)^G$ quand $\mathbf{U}$ est un G-recouvrement sans point fixe. Alors l'ensemble d'indices de $\mathbf{U}$ est isomorphe (en tant qu'ensemble où opère G) à un produit $G \times I$ où G opère par translations gauches sur le premier facteur: $g'\cdot(g, i) = (g'g, i)$; nous identifierons i à (e, i). Soit $(f_{g_0 i_0,\dots,g_n i_n})$ une n-cochaine invariante à coéfficients dans P, posons

$$F_{i_0, g_1 i_1,\dots,g_n i_n} = f_{e\cdot i_0, g_1 i_1,\dots,g_n i_n} \tag{5.5.9}$$

F est une fonction qui dépend des $n+1$ arguments $i_0,\dots,i_n \in I$ *et* des n arguments $g_1,\dots,g_n \in G$, à valeurs dans les $P(U_{i_0} \cap g_1 U_{i_1} \cap \dots \cap g_{i_n} U_{i_n})$, et la cochaine invariante donnée est entièrement déterminée par la connaissance de cette "*cochaine non homogène*" F, en vertu de

$$f_{g_0 i_0,\dots,g_n i_n} = g_0\cdot F_{i_0, g_0^{-1} g_1 i_1,\dots,g_0^{-1} g_n i_n} \tag{5.5.10}$$

cette formule définit d'ailleurs, quand on part d'une cochaine non homogène F, une cochaine invariante f, et la cochaine non homogène associée à f n'est autre que F. Reste à exprimer l'opèrateur différentiel de $C(\mathbf{U}, P)^G$ directement en termes de cochaines non homogènes. On trouve immédiatement:

$$\begin{aligned}(\partial F)_{i_0\, g_1 i_1,\dots,g_{n+1} i_{n+1}} &= g_1\cdot F_{i_1, g_1^{-1} g_2 i_2,\dots,g_1^{-1} g_{n+1} i_{n+1}} \\ &+ \sum_{1 \leqq \alpha \leqq n+1} (-1)^\alpha F_{i_0, g_1 i_1,\dots,\widehat{g_\alpha i_\alpha},\dots,g_{n+1} i_{n+1}}\end{aligned} \tag{5.5.11}$$

où le signe $\wedge$ signifie que les lettres placées en dessous doivent être omises. Un cas particulièrement intéressant est celui où I est réduit à un élément, c'est à dire où on part d'une partie D de X telle que $\bigcup_{g \in G} g\cdot D = X$, et qu'on considère le recouvrement $(g\cdot D)_{g \in G}$. Alors les n-cochaines non homogènes sont des systèmes $(F_{g_1,\dots g_n})$, avec

$$F_{g_1,\dots,g_n} \in P(D \cap g_1\cdot D \cap \dots \cap g_n\cdot D)$$

et la formule (5.5.11) devient

$$\begin{aligned}(\partial F)_{g_1,\dots,g_{n+1}} &= g_1\cdot F_{g_1^{-1} g_2,\dots,g_1^{-1} g_{n+1}} \\ &+ \sum_{1 \leqq \alpha \leqq n+1} (-1)^\alpha F_{g_1\dots,\widehat{g_\alpha},\dots,g_{n+1}}.\end{aligned} \tag{5.5.11 bis}$$

Soit donc L l'ensemble des $g \in G$ tels que $g\cdot D \cap D \neq \phi$ (ce sera un ensemble fini dans les cas "raisonnables"), la formule précédente montre que le complexe $C(\mathbf{U}, P)^G$ donnant les groupes $H^n(\mathbf{U}; G, P)$ peut se construire en connaissant uniquement la loi de composition $(g, g') \to g^{-1}g'$ dans L (là où elle est définie), les intersections $D \cap g \cdot D (g \in L)$, et bien entendu les groupes $P(D \cap g_1 \cdot D \cap \ldots \cap g_n \cdot D)$ (les g_i dans L), leurs applications de restrictions et la façon dont les $g_i \in L$ y opèrent.

REMARQUES I. a) Dans les conditions précédentes, supposons par exemple que P soit le faisceau constant défini par un anneau commutatif k, et que les $D \cap g_1 \cdot D \cap \ldots \cap g_n \cdot D$ soient acycliques pour k, et connexes. Alors les valeurs $F_{g_1, \ldots, g_n}$ sont simplement des éléments de k (définis pour $D \cap g_1 \cdot D \cap \ldots \cap g_n \cdot D_n \neq \phi$), et le complexe de ces cochaines donne la cohomlogie $H^*(X; G, k)$. Cela donne une méthode explicite de calcul si on suppose l'ensemble L ci-dessus fini (ce qui implique que le complexe $C(\mathbf{U}, k)^G$ est libre de type fini en toute dimension). Il semble que ceci doive permettre par exemple la calcul de la cohomologie des groupes modulaires à plusieurs variables (ici $H^*(X; G, Z) = H^*(G, Z)$, puisque X est un ouvert contractile de l'espace euclidien), quand on connait un domaine fondamental assez simple D, (sans avoir à regarder ce qui se passe aux points multiples comme dans la méthode [10], qui semble impratiquable pour un ensemble de points fixes trop compliqué).

b) Prenons $D = X$, donc $\mathbf{U} = (g \cdot X)_{g \in G}$, on constate que la suite spectrale du théorème 5.5.3 n'est autre que la deuxième suite spectrale du théorème 5.2.1, de terme initial $H^p(G, H^q(X, A))$. On notera d'ailleurs qu'il y a en tous cas un homomorphisme fonctoriel canonique de la suite spectrale du théorème 5.5.3. dans la deuxième suite spectrale du théorème 5.5.1, comme on voit en complétant le lemme 5.5.1. resp. 5.5.2. dans ce sens.

Pour finir ce numéro, nous allons donner quelques indications sur le calcul "čechiste" des $H^n(X; G, A)$, généralisant les considérations de 3.8. Soient $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ deux G-recouvrements, $\mathbf{V}$ plus fin que $\mathbf{U}$, on va définir des homomorphismes canoniques

(5.5.12) $$H^n(\mathbf{U}; G, P) \to H^n(\mathbf{V}; G, P)$$

définis pour tout G-préfaisceau abélien P, et fonctoriels en P. Tout d'abord, posant $\mathbf{U} = (U_i)_{i \in I}$, $\mathbf{V} = (V_j)_{j \in J}$, supposons qu'il existe une application $\varphi : J \to I$ telle que $V_j \subset U_{\varphi(j)}$ pour tout $j \in J$, *et qui commute à* G. On en déduit classiquement un homomorphisme $\bar{\varphi}$: $C(\mathbf{U}, P) \to C(\mathbf{V}, P)$, et qui de plus ici commute à G, d'où en vertu de (5.5.3) un homomorphisme (5.5.12). Ce dernier est ***indépendant du choix de*** φ. Si en effet φ' est une autre application ayant les mêmes propriétés, on construit classiquement une homotopie bien déterminée s de $\bar{\varphi}$ à $\bar{\varphi}' : \bar{\varphi} - \bar{\varphi}' = \partial s + s\partial$, et pour des raisons évidentes de "transport de structure " s commute à G, d'où résulte que $\bar{\varphi}$ et $\bar{\varphi}'$ définissent le même homomorphisme (5.5.12). Si on ne suppose plus que l'on peut trouver une φ comme ci-dessus, on comsidère l'ensemble $I' = G \times I$ où on fait opérer G par $g'(g, i) = (g'g, i)$, et le G-recouvrement $\mathbf{U}'$ sans points fixes $(U'_{(g,i)})_{(g,i) \in G \times I}$ défini par $U'_{(g,i)} = U_{g \cdot i} = gU_i$. L'application $\psi(g, i) = g \cdot i$ a les propriétés requises plus haut, et définit donc un homomorphisme.

$$H^n(\mathbf{U}; G, P) \to H^n(\mathbf{U}'; G, P)$$

Il suffit donc de définir un homomorphisme canonique $H^n(\mathbf{U}'; G, P) \to H^n(\mathbf{V}; G, P)$, or on est maintenant dans le cas envisagé au début, grâce au fait que $\mathbf{U}'$ est un G-recouvrement *sans points fixes* moins fin que $\mathbf{V}$. La définition des homomorphismes (5. 5. 12) est ainsi achevée, de plus ces homomorphismes jouissent de proprtétés de transitivité évidentes. Il s'ensuit d'abord que si $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont deux G-recouvrements équivalents, alors l'homomorphisme (5. 5. 12) est un isomorphisme, de sorte que $H^n(\mathbf{U}; G, P)$ ne dépend que de la classe du G-recouvrement $\mathbf{U}$ (pour la relation d'équivalence définie par la relation de préordre : $\mathbf{V}$ est plus fin que $\mathbf{U}$). Posons alors

$$\check{H}^n(X; G, P) = \varinjlim \cdot H^n(\mathbf{U}; G, P) \tag{5.5.13}$$

la limite inductive étant prise suivant l'ensemble ordonné des classes de G-recouvrements ouverts de X. Les homomorphismes (5. 5. 3) définissent des homomorphismes fonctoriels

$$\check{H}^n(X; G, A) \to H^n(X; G, A) \tag{5.5.14}$$

pour $A \in \mathbf{C}^{X(G)}$; on se propose d'indiquer des conditions sous lesquelles on a là des isomorphismes. Un passage à la limite inductive dans les suites spectrales associées aux divers $\mathbf{U}$ (théorème 5. 5. 3) montre que $H^*(X; G, A)$ est l'aboutissement d'un foncteur spectral cohomologique, dont le terme initial est

$$E_2^{p,q}(A) = H^p(X; G, H^q(A)), \tag{5.5.15}$$

les homomorphismes (5. 5. 14) n'étant autres que les "edge-homomorphisms" de cette suite spectrale. Or, on prouve :

LEMME 5. 5. 5 *Supposons que Y soit paracompact, X séparé et que G soit un groupe discontinu d'homéomorphismes dans X (cf. 5. 5. 3). Si P est un G-préfaisceau abélien tel que le faisceau associé soit nul, alors $\check{H}^n(X; G, P) = 0$ pour tout $n > 0$.*

Dans le calcul de $\check{H}^n(X; G, P)$ d'après (5. 5. 13), on peut se borner à des G-recouvrements $\mathbf{U}$ sans points fixes ; pour ceux-ci la proposition 5. 5. 4 s'applique, de telle façon qu'il suffit de prouver ceci : si $f^n \in C^n(\mathbf{U}, P)^G$, oû $\mathbf{U}$ est un G-recouvrement ouvert sans point fixe, alors il existe un G-recouvrement ouvert sans point fixe $\mathbf{V}$ plus fin, et une application $\varphi : J \to I$ pour les ensembles d'indices, satisfaisant aux conditions envisagées plus haut, et telle que $\bar{\varphi}(f^n) = 0$. On commence par montrer qu'il existe des G-recouvrements ouverts arbirairement fins du type $(gU_i)_{(g,i)\in G\times I}$, où (U_i) est une famille d'ouverts de X telle que, si G_i est le stabilisator de U_i, G_i soit fini et $g \notin G_i$ implique $gU_i \cap U_i = \phi$. On supposera donc cidessus que $\mathbf{U}$ est du type précédent. Considérons la cochaine non homogène $(F_{i_0, g_1 i_1, \dots, g_n i_n})$ qui correspond à f^n. Considérons I comme le nerf du recouvrement $(f(U_i)) = (U'_i)$ de Y, et pour tout simplexe $s = (i_0, \dots, i_n)$ de I, soit $U'_s = U'_{i_0 \dots, i_n}$. Pour fout n-simplexe s de I, et tout $y \in U'_s$ soit W^s_y un voisinage ouvert de y, contenu dans U'_s, et tel que pour tout système $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$ tel que $U_{s,\mathbf{g}} = U_{i_0} \cap g_1 U_{i_1} \cap \dots \cap g_n U_{i_n}$ ait une projection sur Y qui contient y, la restriction de $F_{i_0, g_1 i_1, \dots, g_n i_n}$ à

$U_{s,g} \cap f^{-1}(W_y^s)$ soit nulle : un tel W_y^s existe grâce à l'hypothèse sur P, au fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de systèmes g à considérer, et que les $U_{s,g} \cap f^{-1}(W)$, quand W parcourt un système fondamental de voisinages de y, parcourt un système fondamental de voisinages de l'ensemble fini des $x \in U_{s,g}$ se projetant sur y. Y étant paracompact, il résulte maintenant d'un lemme bien connu en théorie de Čech, qu'on peut trouver un recouvrement $\mathbf{V}' = (V'_j)_{j \in J}$ de Y, une application $\varphi' : J \to I$ telle que $V'_j \subset U'_{\varphi'(j)}$ pour tout $j \in J$, et telle que pour tout n-simplexe t de J, V'_t soit contenu dans un au moins des ensembles $W_y^{\varphi'(t)}$. Soit alors $V_j = U_{\varphi'(j)} \cap f^{-1}(V'_j)$, soit $\mathbf{V} = (g \cdot V_j)_{(g,j) \in G \times J}$ et considérons l'application $\varphi : G \times J \to G \times I$ définie par φ'. On voit aussitôt que $(\mathbf{V}, \varphi)$ satifait aux conditions voulues, et notamment $\varphi(F) = 0$ d'où $\bar{\varphi}(f^n) = 0$.

Le faisceau assoié au préfaisceau $H^q(A)$, $q > 0$, est nul (lemme 3.8.2). Le lemme 5.5.5 et la suite spectrale de terme initial 5.5.15) montrent alors:

THEOREME 5.5.6. *Si G est un groupe discret d'homéomorphismes de X, et si $Y = X/G$ est paracompact, alors les homomorphismes*

$$\check{H}^n(X; G, A) \to H^n(X; G, A) \tag{5.5.14}$$

sont des isomorohismes pour tout G-faisceau abélien A.

REMARQUES II. De la suite spectrale de terme initial (5.5.15) on tire, sans aucune hypothèse sur X, G, A, que

$$\check{H}^1(X : G, A) = H^1(X, G, A)$$

(et que $\check{H}^2(X; G, A) \to H^2(X; G, A)$ est injectif, car on vérifie que $E_2^{0,n} = 0$ pour tout $n > 0$). Or $\check{H}^1(X; G, A)$ peut s'interprèter géométriquement, comme on constate facilement, comme l'ensemble des classes de G-A-fibrés sur X (i. e. de fibrés sur X "à faisceau structural A" [11], et où G opère de façon compatible avec cette structure). D'ailleurs, $\check{H}^1(X; G, A)$ est défini aussi, et admet la même interprétation géométrique, si A est un G-faisceau de groupes non nécessairement commutatifs. Les développement de [11], en particulier du Chap. V, peuvent alors se transporter à peu près mot à mot dans le contexte plus général des G-fibrés. Il serait d'ailleurs indiqué de donner un traitement d'"Algèbre Homologique non commutative," dans le contexte des foncteurs et catégories, qui englobe à la fois cette théorie des fibrés, et le mécanisme algébrique des questions d'extensions de groupes (de Lie et autres) tel qu'il se trouve développé par exemple dans des papiers de Hochschild et de A. Shapiro [12, 13, 19].

5.6. **Les** $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(X; A, B)$. Dans ce numéro, $\mathbf{O}$ désigne un G-faisceau d'anneaux fixé, et on considère la catégorie abélienne $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$ des G-$\mathbf{O}$-Modules (cf. 5.1). Le groupe des G-$\mathbf{O}$-homomorphismes d'un G-$\mathbf{O}$-Module A dans un autre B sera noté $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O},G}(A, B)$, ou $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O},G}(X; A, B)$ si on veut expliciter l'espace sur lequel on considère A et B (ce qui donne un sens aussi au symbole $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O},G}(U; A, B)$ si U est une partie de X stable par G). On a, en notant que le faisceau $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ est un G-faisceau, donc le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B) = \Gamma_X \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ un G-module, les formules

(5.6.1) $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O},G}(A, B) = \Gamma_X^G \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B) = \Gamma^G \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B).$$

On pose:

(5.6.2) $$\mathbf{Hom}_{\mathbf{O},G}(A, B) = (\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}\, A, B))^G$$

donc $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O},G}(A, B)$ est le faisceau sur $Y = X/G$ dont les sections sur l'ouvert $U \subset Y$ forment le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O},G}(f^{-1}U; A, B)$ des G-$\mathbf{O}$-homomorphismes de $A|f^{-1}(U)$ dans $B|f^{-1}(U)$. Posons:

(5.6.3) $$\begin{gathered} \mathbf{h}_{\mathbf{O},A}(B) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B),\ h_{\mathbf{O},A}(B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B) \\ \mathbf{h}_{\mathbf{O},G,A}(B) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{O},}({}^G A, B),\ h_{\mathbf{O},,G,A}(B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O},G}(A, B), \end{gathered}$$

définissant ainsi, pour A fixé, quatre foncteurs exacts à gauche, les deux derniers étant liés aux deux premiers (déjà rencontrés au Chapitre IV) par les formules fonctorielles

(5.6.4) $$\mathbf{h}_{\mathbf{O},G,A} = f_*^G \mathbf{h}_{\mathbf{O},A}$$

(5.6.5) $$h_{\mathbf{O},G,A} = \Gamma_Y \mathbf{h}_{\mathbf{O},G,A} = \Gamma^G \mathbf{h}_{\mathbf{O},A} = \Gamma_X^G \mathbf{h}_{\mathbf{O},A}.$$

Nous poserons:

(5.6.6) $$\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(X; A, B) = R^n h_{\mathbf{O},G,A}(B),$$

(5.6.7) $$\mathbf{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(X; A, B) = R^n \mathbf{h}_{\mathbf{O},G,A}(B).$$

Ainsi, pour deux G-$\mathbf{O}$-Modules A, B, les $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(X; A, B)$ sont des groupes abéliens, formant un foncteur cohomologique universel en B et se réduisant à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O},G}(X; A, B)$ en dimension 0, tandis que les $\mathbf{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(A, B)$ sont des faisceaux abéliens sur Y, formant un foncteur cohomologique universel en B, et se réduisant à $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O},G}(A, B)$ en dimension 0. D'ailleurs les $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(X; A, B)$ ne sont autres que les groupes Ext généraux dans la catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$. (Bien entendu, nos définitions sont justifiées grâce à la prop. 5.1.1). Comme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O},G}(A, B)$ donc aussi $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O},G}(A, B)$ est un foncteur contravariant exact en A chaque fois que B est un objet injectif de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$, il en rèsulte (cf. 2.3) que les $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(X; A, B)$ resp. les $\mathbf{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(A, B)$ forment aussi un foncteur cohomologique contravariant par rapport à A (pour B fixé). Notons enfin qu'on montre facilement, comme dans 4.2 et 5.2 (qui sont des cas particuliers) que l'on a

(5.6.8) $$\mathbf{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(A, B)|U = \mathbf{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(A|f^{-1}(U), B|f^{-1}(U))$$

(*nature locale des* **Ext** par rapport à l'espace Y). On en conclut un énoncé analogue à celui du corollaire à la prop. 5.2.1, et qui permet, dans le cas où G est un groupe *discontinu* d'homomorphismes (cf. 5.3), de se ramener au cas où G est un groupe fini. On montre alors, en reprenant les raisonnements de 4.1, que les homomorphismes naturels

(5.6.9) $$\mathbf{Hom}_{\mathbf{O},G}(A, B)(y) \to \mathrm{Hom}_{U_x}(A(x), B(x)) \qquad (f(x) = y)$$

(où U_x est l'anneau, engendré par $\mathbf{O}(x)$ et $\mathbf{Z}(G)$, envisagé dans 5.1) sont bijectifs lorsque $\mathbf{O}$ est un faisceau *cohérent* d'anneaux *noethériens* à gauche, et A est cohérent en tant que $\mathbf{O}$-module; et que sous ces conditions sur $X, G, \mathbf{O}$, le U_x-module $B(x)$ est injectif chaque fois que B est un objet injectif de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$. (On remplacera dans la démonstration, les $\mathbf{O}$-Modules libres de 4.1. par des G-$\mathbf{O}$-modules du type $L(U)$ introduits dans la démonstration de prop. 5.1.1). On en conclut immédiatement que *les homomorphismes naturels*

$$(5.6.10) \qquad \mathbf{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(A, B)(y) \to \mathrm{Ext}^n_{U_x}(A(x), B(x))$$

déduits des homomorphismes (5.6.9) *sont des isomorphismes si on suppose le groupe d'homéomorphismes G discontinu au sens de* 5.3, $\mathbf{O}$ *un faisceau cohérent d'anneaux noethériens à gauche, et A un G-*$\mathbf{O}$*-Module, cohérent en tant que* $\mathbf{O}$*-Module*. Cet énoncé contient à la fois les théorèmes 4.2.2 et 5.3.1 (le faisceau d'anneaux constant $\mathbf{Z}$ étant cohérent et noethérien!) et précise dans les cas les plus importants la structure des $\mathbf{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(A, B)$.

Des formules (5.6.4)et (5.6.5), on peut tirer autant de suites spectrales par application du théorème 2.4.1. Nous ne nous intéresserons qu'à celles déduites de (5.6.5), aboutissant à $\mathrm{Ext}^*_{\mathbf{O},G}(X; A, B)$. Il faut encore vérifier que dans chaque de ces trois formules donnant $h_{\mathbf{O},G,A}$ comme un foncteur composé, la condition d'acylicité usuelle est vérifiée, cela résulte du

LEMME 5.6.1. *Supposons que B soit un objet injectif de* $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$, *alors* $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O},G}(A, B)$ *est un faisceau flasque sur Y*, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ *est un G-module* Γ^G*-acyclique, et* $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ *est un G-faisceau* Γ^G_X*-acyclique.*

En vertu de proposition 5.1.2, on est ramené au cas où B est le faisceau produit défini par une famille $(B_x)_{x\in X}$ de U_x-modules injectifs B_x. Il en résulte que le G-faisceau abélien $\mathbf{H} = \mathbf{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ est le faisceau produit défini par la famille de G-modules $H_x = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}(x)}(A(x), B(x))$. Alors $\mathbf{Hom}_{\mathbf{O},G}(A, B)$ est le faisceau produit sur Y défini par la famille des groupes $H_y = \prod (H_x)^{G_x}$ (produit étendu aux x tels que $f(x) = y$) donc est flasque. Admettons un instant que les H_x sont des G_x-modules Γ^{G_x}-acycliques, (ce sera prouvé dans le corollaire ci-dessous). Alors le G-module $\bar{H}_x$ induit par le G_x-module H_x par extension contravariante des scalaires est Γ^G-acyclique comme bien connu, donc $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B) = \Gamma_X\mathbf{H} = \prod_{x\in X/G} \bar{H}_x$ est Γ^G-acyclique. Enfin, $\mathbf{H}$ étant flasque donc Γ_X-acyclique, il résulte de la deuxième suite spectrale du théorème 5.2.1 que $H^n(X; G, \mathbf{H}) = H^n(G, \Gamma_X\mathbf{H})$, qui est nul pour $n > 0$ d'après ce qu'on a vu. Cela achève la démonstration du lemme 5.6.1, pourvu qu'on prouve le cas particulier suivant:

COROLLAIRE. *Soit O un anneau avec unité ou opère un groupe G, soit U l'anneau engendré par O et* $\mathbf{Z}(G)$, *soumis aux relations de commutation* $g\lambda g^{-1} = \lambda^g$ *pour* $g \in G$, $\lambda \in O$. *Soient A et B deux U-modules, B injectif. Alors le G-module* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(A, B)$ *est* Γ^G*-acyclique.* (*Ne pas croire qu'il soit injectif!*)

Soit $B' = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), B)$ le groupe des applications f de G dans B, nous

y ferons opérer G et O par

$$(g'f)(g) = f(gg'), \qquad (\lambda f)(g) = \lambda^g f(g),$$

on constate aussitôt que B' devient ainsi un U-module, et qu'on définit un U-homomorphisme injectif $\varphi : B \to B'$ en posant

$$\varphi(b)(g) = g \cdot b$$

Ainsi B se plonge dans le U-module B', et comme B est injectif, c'est un facteur direct de B', donc $\mathrm{Hom}_O(A, B)$ est (en tant que G-module) un facteur direct de $\mathrm{Hom}_O(A, B')$, et il suffit de montrer que ce dernier est Γ^G-acyclique. Posons $H = \mathrm{Hom}_O(A, B)$, considérons H comme un G-module en y faisant opérer G par $u^g(a) = g\, u(g^{-1}a)$; on vérifie alors immédiatement qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_O(A, B') = \mathrm{Hom}_O(A, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), B)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), \mathrm{Hom}_O(A, B))$$

en convenant de mettre sur le dernier membre $H'' = \mathrm{Hom}_G(\mathbf{Z}(G), H)$ la structure de G-module définie par $f^{g'}(g) = g'f(gg')$. On écrit pour ceci, pour toute $u \in \mathrm{Hom}_O(A, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), B))$, $u(a)(g) = g \cdot u_g(a)$, alors les u_g sont des O-homomorphismes de A dans B et u s'identifie à la famille des u_g, identifiée à un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), H)$. Considérons aussi le G-module H' obtenu en mettant sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(G), H)$ la structure de G-module définie par $(g'f)(g) = f(gg')$. On obtient un G-isomorphisme ψ de H' sur H'' eu posant $\psi(f)(g) = g^f(g)$. Or il est bien connu que H' est Γ^G-acyclique, quel que soit le G-module H, il en est donc de même de H'', cqfd.

Le lemme 5.6.1 nous permet de tirer des formules (5.6.5) trois suites spectrales aboutissant à $\mathrm{Ext}_{\mathbf{O},G}(X; A, B)$. Pour expliciter les termes initiaux des deux dernières, il reste à expliciter les foncteurs dérivés de $h_{\mathbf{O},A}$ et $\mathbf{h}_{\mathbf{O},A}$ considérés comme foncteurs sur $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$. Quand on les considère comme foncteurs sur la catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ des $\mathbf{O}$-Modules (sans opérateurs) leurs foncteurs dérivés sont par définition (4.2) les foncteurs $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O}}(X; A, B)$ resp. les foncteurs $\mathbf{Ext}^n_{\mathbf{O}}(A$ $B)$. Il en est encore ainsi quand on les considère comme des foncteurs sur $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$, comme il résulte aussitôt des définitions et du

LEMME 5.6.2. *Si B est un G-$\mathbf{O}$-Module injectif, c'est un $\mathbf{O}$-Module injectif.*

Comme dans le lemme 5.6.1, on est ramené au cas où B est le faisceau produit défini par une famille $(B_x)_{x \in X}$ de U_x-modules injectifs B_x. Il suffit donc de prouver que les B_x sont aussi des $\mathbf{O}(x)$-modules injectifs, ce qui nous ramène au cas où X est réduit à un point x. En fait, la démonstration ne semble pas plus simple dans ce cas, et celle que nous allons donner s'appliquerait en fait chaque fois qu'on a une catégorie abélienne $\mathbf{C}$ (telle que $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$) où "opère" un groupe G, comme dans[9)], permettant de passer à la catégorie $\mathbf{C}(G)$ (ici $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$) des "objets avec opérateur" correspondante; on suppose que $\mathbf{C}$ satisfait AB 5) et admet un générateur: *alors tout objet injectif A de $\mathbf{C}(G)$ est aussi injectif dans $\mathbf{C}$.* Pour le prouver, il suffit évidemment de prouver que tout objet A de $\mathbf{C}(G)$ se plonge dans un objet M de $\mathbf{C}(G)$ qui est injectif dans $\mathbf{C}$. Pour ceci, il suffit d'examiner la construction donnée dans 1.10 pour l'immersion de A (considéré comme objet de $\mathbf{C}$) dans un objet injectif M de $\mathbf{C}$: on plonge A

dans un module $M(A)$, qui est un foncteur (non additif !) de A, l'homomorphisme $A \to M_1(A)$ étant fonctoriel ; on itère le procédé transfiniment, et on passe à la limite inductive, ce qui nous donne un objet injectif $M(A)$ qui est encore un *foncteur* en A, et une injection $A \to M(A)$ qui est un homomorphisme *fonctoriel*. Cette construction est bien définie, une fois choisi un générateur U de $\mathbf{C}$ et un cardinal convenable. De plus, remplaçant au besoin U par la somme directe de ses transformés par G (comparer avec la démonstration de prop. 5.1.1), on peut supposer que U provient d'un élément de $\mathbf{C}(G)$. On voit alors, pour des raisons évidentes de "transport de structure", que si A est un objet de $\mathbf{C}(G)$, G opère aussi dans $M(A)$, qui se trouve donc être un objet de $\mathbf{C}(G)$ en réalité, et l'injection $A \to M(A)$ est compatible avec les opérations de G. C'est l'injection cherchée de A dans un objet de $\mathbf{C}(G)$ qui est injectif dans $\mathbf{C}$. Cela achève la démonstration ; le lecteur qui conserverait des doutes explicitera la démonstration dans le cas $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ envisagé dans le lemme, en se bornant s'il préfère au cas "purement algébrique" où X est réduit à un point.

Nous sommes maintenant en measure d'énoncer le résultat principal de ce numéro, démontré dans les considérations qui précédaient :

THÉORÈME 5.6.3. *Soit X un espace muni d'un groupe d'homéomorphismes G et d'un G-faisceau d'anneaux $\mathbf{O}$. Soit A un G-$\mathbf{O}$-Module. On peut trouver, sur la catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$ des G-$\mathbf{O}$-Modules, trois foncteurs spectraux cohomologiques, aboutissant au foncteur gradué* $(\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(X; A, B))$, *et dont les termes initiaux sont respectivement :*

$$
(5.6.11) \qquad
\begin{aligned}
\mathrm{I}_2^{p,q}(B) &= H^p(Y, \mathbf{Ext}^q_{\mathbf{O},G}(A, B)),\\
\mathrm{II}_2^{p,q}(B) &= H^p(G, \mathrm{Ext}^q_{\mathbf{O}}(X; A, B)),\\
\mathrm{III}_2^{p,q}(B) &= H^p(X; G, \mathbf{Ext}^q_{\mathbf{O}}(A, B)).
\end{aligned}
$$

Si $\mathbf{O} = A$ les deux premières suites spectrales se réduisent aux suites spectrales du théorème 5.2.1, la troisième suite spectrale est nouvelle. Si G se réduit à l'élément neutre, alors les suites spectrales I et III sont iden tique, et identiques à la suite spectrale du théorème 4.2.1, tandis que la suite spectrale II est triviale. Si X se réduit à un point, les suites spec trales II et III sont identiques, et d'ailleurs non triviales en général (et, il semble, utiles), tandis que la suite spectrale I est triviale.[11)]

On tire des suites spectrales précédentes des "edge-homomorphisms" et des suites exactes à 5 termes, que nous n'écrirons pas. Nous n'expliciterons qu'un seul cas particulier de dégénérescence :

---

11) La suite spectrale non triviale obtenue aboutit à $\mathrm{Ext}_U(A, B)$ et son terme initial est $H^p(G, \mathrm{Ext}^q_O(A, B))$ (U êtant l'anneau engendrê par $\mathbf{Z}(G)$ et le G-annean O, pour les relations de commutation $g\lambda g^{-1} = \lambda^g$ pour $\lambda \in O$, $g \in G$). Signalons qu'on peut obtenir cette suite spectrale plus facilement directement, en utilisant des résolutions projectives de A au lieu de résolutions injectives de B. On voit en effet très facilement que si A est un U-module libre, alors A est un O-module libre, et $\mathrm{Hom}_O(A, B)$ est un G-module Γ^G-acyclique.

COROLLAIRE. *Si le G-$\mathbf{O}$-module A est localement isomorphe, en tant que $\mathbf{O}$-module, à $\mathbf{O}^n$, alors on a des isomorphismes canoniques*

(5.6.12) $$\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(X; A, B) = H^n(X; G, \mathbf{Hom_O}(A, B)).$$

Cela résulte de la suite spectrale III, puisque alors $\mathbf{Ext}^q_{\mathbf{O}}(A, B) = 0$ pour $q > 0$ (prop. 4.2.3). En particulier, prenant $A = \mathbf{O}$, on trouve :

COROLLAIRE 2. *On a, pour tout G-$\mathbf{O}$-Module B, des isomorphismes fonctoriels :*

(5.6.14) $$\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(X; \mathbf{O}, B) = H^n(X; G, B).$$

REMARQUES. Signalons encore, dans deux cas particuliers, deux autres suites spectrales aboutissant à $\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(X; A, B)$. Supposons que $\mathbf{O}$ soit le G-faisceau d'anneaux constant défini par un anneau O où G opère, et que A soit le G-$\mathbf{O}$-faisceau constant $\mathbf{M}$ défini par un O-module M où G opère de façon compatible avec ses opérations sur $O: g\cdot(\lambda m) = g(\lambda)g(m)$. Introduisons l'anneau U engendré par O et $\mathbf{Z}(G)$ soumis aux relations de commutation $g\lambda g^{-1} = g(\lambda)$, M est donc un U-module. Considérons le foncteur $h_{U,M}$ sur la catégorie des U-modules, défini par $h_{U,M}(N) = \mathrm{Hom}_U(M, N)$, on a alors pour tout G-$\mathbf{O}$-Module B : $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O},G}(\mathbf{M}, B) = \mathrm{Hom}_U(M, \Gamma_X(B))$, i. e. on a l'identité fonctorielle

(5.6.5 bis) $$h_{\mathbf{O},G,M} = h_{U,M}\Gamma_X.$$

On vérifie facilement de plus que Γ_X transforme objets injectifs de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$ en des U-modules injectifs, de sorte que le théorème 2.4.1 donne un foncteur spectral cohomologique IV sur la catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$, aboutissant au foncteur gradué $(\mathrm{Ext}^n_{\mathbf{O},G}(X; \mathbf{M}, B))$, et dont le terme initial est

(5.6.11 bis) $$IV_2^{p,q}(B) = \mathrm{Ext}^p_U(M, H^q(X, B)).$$

Si on suppose de plus que G opère trivialement sur M, alors on a aussi $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O},G}(\mathbf{M}, B) = \mathrm{Hom}_U(M, \Gamma_X(B)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(M, \Gamma_X^G(B))$, d'où la formule fonctorielle

(5.6.5 ter) $$h_{\mathbf{O},G,M} = h_{O,M}\Gamma_X^G$$

On peut encore montrer que Γ_X^G transforme objets injectifs de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}(G)}$ en O-modules injectifs (en montrant que si N est un U-module injectif, alors N^G est un O-module injectif), et le théorème 2.4.1. donne un cinquième foncteur spectral cohomologique, de même aboutissement que les précédents, et dont le terme initial est

(5.6.11 ter) $$V_2^{p,q}(B) = \mathrm{Ext}^p_O(M, H^q(X; G, A))$$

Si G est réduit à l'unité, les suites spectrales IV et V coïncident avec la suite spectrale du théorème 4.3.1. Si X est réduit à un point, la suite spectrale IV est triviale, mais la suite spectrale V n'est pas triviale en général, et ne se réduit pas aux précédentes[12].

12) Le terme initial de cette suite spectral est (avec les notations de 11)) $\mathrm{Ext}^p_O(A, H^q(G, B))$.

Un exemple. Supposons que G soit un groupe d'automorphismes d'une variété holomorphe, ou plus généralement d'un "espace holomorphe" X, $\mathbf{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X. Si A et B sont deux faisceaux analytiques cohérents où G opère, comme tout faisceau analytique extension de A par B est cohérent, il s'ensuit que les classes de G-$\mathbf{O}$-faisceaux cohérents extensions de A par B correspondent aux éléments de l'espace vectoriel complexe $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{O},G}(X; A, B)$. D'autre part, si n est un entier >0, il y a une correspondance naturelle entre les fibrés vectoriele holomorphes E à fibre l'espace $\mathbf{C}^n$, et les faisceaux algébriques cohérents M sur X qui sont localment isomorphes à $\mathbf{O}^n$: à E correspond le faisceau $\mathbf{O}(E)$ des germes de sections holomorphes de E, et à M correspond le fibré holomorphe dont la fibre en $x \in X$ est $M(x) \otimes_{\mathbf{O}(x)} \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ étant considéré comme un module sur l'algèbre augmentée $\mathbf{O}(x)$). Il est alors immédiat que dans cette correspondance, les fibrés vectoriels holomorphes à fibre $\mathbf{C}^n$ admettant G comme groupe d'opérateurs correspondent aux G-$\mathbf{O}$-Modules qui sont, en tant que $\mathbf{O}$-Modules, localement isomorphes à $\mathbf{O}^n$. Il s'ensuit que les classes d'extensions d'un fibré holomorphe à opérateurs E par un autre F correspondent de façon naturelle aux éléments de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{O},G}(X; \mathbf{O}(E), \mathbf{O}(F))$, qui est isomorphe, en vertu du corollaire 1 au théorème 5.6.3 à l'espace vectoriel $H^1(X; G, \mathbf{O}(E' \otimes F))$ (E' désignant le fibré dual de E). On peut aller plus loin si G est un groupe *discontinu* car comme on est en caractéristique 0, on aura en vertu du corollaire 1 au théorème 5.3.1: $H^1(X; G, L) = H^1(Y, L^G)$ pour tout G-faisceau d'espaces vectoriels. D'ailleurs si L est un faisceau analytique cohérent, il en est de même de L^G (voir [5, Chap. XII], en particulier $\mathbf{O}(E' \otimes F)^G$ est un faisceau analytique cohérent sur Y. On conclut par exemple, grâce à [7], que si Y est compacte, alors l'espace vectoriel des classes de G-fibrés vectoriels holomorphes extension de E par F est de dimension finie. (En fait, la suite spectrale I montre que si Y est compact, et A et B deux faisceaux analytiques cohérents à opérateurs, alors les $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{O},G}(X; A, B)$ sont de dimension finie). On a des résultats analogues en Gémétrie Algébrique abstraite, sauf qu'alors on ne peut écrire $H^*(X; G, L) = H^*(Y, L^G)$ que si par exemple l'ordre de G est premier à la caractéristique, ou si G opère "sans points fixes".

5.7. Introduction des familles Φ. Soit Φ un antifiltre de parties fermées sur l'espace X, considérons le foncteur

$$\Gamma^G_\Phi(A) = \Gamma_\Phi(A)^G \tag{5.7.1}$$

sur la catégorie $\mathbf{C}^{X(G)}$ des G-faisceaux abéliens sur X. On posera

$$H^p_\Phi(X; G, A) = R^p\Gamma^G_\Phi(A). \tag{5.7.2}$$

Si Φ est l'antifiltre formé de toutes les parties fermées de X, on retrouve les foncteurs $H^n(X; G, A)$ du 5.2. Soit Φ' l'ensemble des parties fermées de X contenues dans une partie fermée $F \in \Phi$ invariante par G, alors il est évident que Φ' est un antifiltre de parties fermées de X, et que $\Gamma^G_\Phi = \Gamma^G_{\Phi'}$. On supposera donc par la suite que $\Phi = \Phi'$, ou ce qui revient au même, que Φ *est l'ensemble des parties fermées F de X telles que $\overline{f(F)} \in \Psi$, où Ψ est un antifiltre de parties fermées de Y.* On a alors les formules fonctorielles:

(5.7.3) $$\Gamma_\Phi^G = \Gamma_\Psi f_*^G = \Gamma^G \Gamma_\Phi.$$

Comme f_*^G transforme objets injectifs de $\mathbf{C}^{X(G)}$ en faisceaux flasques, donc Γ_Ψ-acycliques, la première formule donne encore *un foncteur spectral cohomologique sur* $\mathbf{C}^{X(G)}$, *aboutissant au foncteur gradué* $(H^n(X; G, A))$, *et de terme initial*

(5.7.4) $$I_2^{p,q}(A) = H_\Psi^p(Y, \mathbf{H}^q(G, A)).$$

La seconde suite spectrale du théorème 5.2.1 ne se généralise plus telle quelle, car on ne pourra pas dire en général que si B est un objet injectif de $\mathbf{C}^{X(G)}$, $\Gamma_\Phi(B)$ soit un G-module Γ^G-acyclique. Mais *supposons que tout ensemble de* ψ *ait un voisinage qui soit dans* ψ. Pour tout ouvert $U \subset Y$, soit $A_U = A_{f^{-1}(U)}$ le G-faisceau abélien sur X qui est nul dans $\complement f^{-1}(U)$ et coïncide avec A sur $f^{-1}(U)$. On a $\Gamma_\Phi(A) = \varinjlim \Gamma_X(A_U)$, où la limite inductive est prise suivant l'ensemble ordonné filtrant des parties ouvertes U de Y telles que $\bar{U} \in \Psi$. Comme les applications $\Gamma_X(A_U) \to \Gamma_X(A_V)$ pour $U \subset V$ sont injectives, le foncteur Γ^G passe à la limite inductive, et on obtient une identité fonctorielle :

(5.7.5) $$\Gamma_\Phi^G(A) = \varinjlim .\ \Gamma_X^G(A_U)$$

d'où, comme pour le corollaire 1 à prop. 3.10.1 :

(5.7.6) $$H_\Phi^n(X; G, A) = \varinjlim H^n(X; G, A_U).$$

Or pour tout U, $H^*(X; G, A_U)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale cohomologique $\mathrm{II}(A, U)$ de terme initial

$$\mathrm{II}(A, U)_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, A_U)).$$

et pour U variable, ces suites spectrales forment un système inductif. On conclut alors de (5.7,6) que $H_\Phi^*(X; G, A)$, est *l'aboutissement d'une suite spectrale cohomologique de terme initial*

(5.7.7) $$\mathrm{II}_2^{p,q}(A) = \varinjlim_U .\ H^p(G, H^q(X, A_U)).$$

Bien entendu, cette suite spectrale est même un foncteur spectral en A. Dans les cas les plus importants (que nous allons expliciter ci-dessous) on pourra échanger les signes $H^p(G, -)$ et $\varinjlim .$, et alors on obtient, puisque $\varinjlim . H^q(X, A_U) = H^q(X, A)$ (corollaire 1 de la proposition 3.10.1), la forme usuelle du terme initial :

(5.7.7 bis) $$\mathrm{II}_2^{p,q} = H^p(G, H_\Phi^q(X, A))$$

Conditions de validité de la formule (5.7.7 bis).

a) G est un groupe fini.

b) G opère trivialement dans les $H^q(X, A_U)$, et les $H_p(G, Z)$ sont de type fini.

c) Le système inductif $(H^q(X, A_U))$ est "essentiellement constant" pour tout q, i.e. on peut trouver un système cofinal (U_i) tel que les homomorphismes $H^q(X, A_{U_i}) \to H^q(X, A_{U_j})$ soient des isomorphismes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. ATIYAH, Complex analytic connections, Trans. Amer. Matц. Soc. 85 (1957) 181–207.
[2] A. BOREL, Nouvelle démonstration d'un théorème de P. A. Smith, Commentarii Math. Helv. 29 (1955), 27–39
[3] D. A. BUCHSBAUM, Exact categories and duality, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 1–34
[4] H. CARTAN, Séminaire E. N. S. 1950/51.
[5] H. CARTAN, Séminaire E. N. S. 1951/52.
[5] bisH. CARTAN-C. CHEVALLEY, Séminbire E. N. S. 1955/56.
[6] H. CARTAN-S. EILENBERG, Homological Algebra, Princeton University Press 1956.
[7] H. CARTAN-J. P. SERRE, Un théorème de finitude, C. R. Acad. Sci. Paris 237 (1953), 128-130.
[8] P. CARTIER (Référence non parvenue)
[9] R. GODEMENT, Théorie des faisceaux, en préparation.
[10] R. GODEMENT, Cohomologie des groupes discontinus, Séminaire Bourbaki, Mars 1954.
[11] A. GROTHENDIECK, A general theory of fibre spaces with structure sheaf, University of Kansas 1955.
[12] G. HOCHSCHILD, Group extensions of Lie groups I, Ann. of Math, 54 (1951), 96–109
[13] G. HOCHSCHILD, Group extensions of Lie groups II, Ann. of Math, 54–1951), 537–551.
[14] S. MACLANE, Duality for groups, Bull. Amer. Math. Soc., 56(1950), 485–516.
[15] J. P. SERRE, Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math., 61 (1955), 197–278.
[16] J. P. SERRE, Géométrie Analytique et Géométrie Algébrique. Anna Inst. Fourier VI (1955–56) 1–42.
[17] J. P. SERRE, Classes de groupes abéliens et groupes d'homotopie, Ann. of Math., 58(1953), 258–294.
[18] J. P. SERRE, Sur la cohomologie des variété algébriques, Journ. Math. pures et appl. 36 (1957) 1–16.
[19] A. SHAPIRO, Ann. of Math., 50 (1949), 581–586.
[20] A. WEIL, Fibre spaces in Algebraic Geometry (Notes by A. Wallace), Chicago 1952.
[21] A. WEIL, Généralisation des fonctions abéliennes, J. Math. Pures Appl. 17(1938), 47–87.