Analele Universităţii din Timişoara
Vol. XXXIV, fasc. 1, 1996
Seria Matematică–Informatică

MATEMATICA VĂZUTĂ DIN INTERIOR ŞI EXTERIOR

DAN BURGHELEA*

Motivaţie pentru titlu

Recent am fost întrebat de un coleg nematematician: "Ce este caracteristic matematicii azi?" Răspunsul meu a fost:

Matematica de astăzi este: (1) orientată pe probleme, (2) unitară, (3) dinamică.

În timp ce primul răspuns (1) a fost privit cu scepticism şi ironic calificat "politically corect", (2) şi (3) au fost atacate frontal:

- Unde este unitatea când, în locul celor patru domenii tradiţionale de matematică, analiză, algebră, geometrie, probabilităţi, revistele de referate (ce raportează cercetările prezente) clasifică matematica prezentă în 70 de domenii şi 150 de subdomenii?

- Unde este dinamismul când matematica la care este expus studentul în liceu şi "college" (primii 3 ani de facultate) este esenţialmente aceeaşi ca şi cea la care au fost expuşi studenţii acum 50-60 de ani?

Dialogul sus menţionat arată cît de diferită poate fi percepţia despre matematică dinăuntrul matematicii, a unui producător de matematică, şi din afara matematicii, a unui nematematician. Textul care urmează reprezintă reflexii personale pe linia sugerată de titlu.

INTRODUCERE

Ca orice domeniu de intensă activitate intelectuală, matematica pune probleme fundamentale ca : Ce este? Cum se face? La ce serveşte? Răspunsul la aceste întrebări este mai întotdeauna subiectiv, istoric şi incomplet, dar în acelaşi timp util şi interesant.

---

*Nota redacţiei: prelegere ţinută la Universitatea de Vest din Timişoara la 28 septembrie 1995, cu ocazia decernării titlului de Doctor Honoris Causa profesorului Dan Burghelea de la Ohio State University - Columbus, U.S.A.

În prezenta expunere voi aborda aceste probleme şi, bazându-mă pe experienţa mea de cercetător şi profesor, voi prezenta o serie de reflexii personale.

Expunerea are patru părţi; conţinutul lor este indicat de următoarele titluri şi subtitluri.

1. Ce este matematica ?

1.1 Ştiinţă;
1.2 Artă;
1.3 Limbaj;
1.4 Mod de gândire.

2. Domeniile tradiţionale şi diviziunile matematicii

2.1 Algebră versus analiză versus geometrie;
2.2 Matematică pură versus matematică aplicată;
2.3 Matematică speculativă versus matematică concretă;
2.4 Matematică teoretizantă versus matematică problematizantă;
2.5 Matematică "soft" versus matematică "hard" .

3. Valoare în matematică

3.1 Cum şi cine decide valoarea în matematică;
3.2 Tipuri de matematicieni;
3.3 Modă şi carismă în matematică.

4. Matematica în a doua jumătate a secolului 20

4.1 Rezultate importante;
4.2 Matematică şi fizică;
4.3 Viitorul matematicii.

1. CE ESTE MATEMATICA ?

1.1. Ştiinţă

Matematica este universal acceptată ca o ştiinţă, dar nu o ştiinţă a naturii, în ciuda faptului că impactul maxim al matematicii este în ştiinţele naturii şi tehnologie.

Matematica contemplă *Universul Matematic* care, deşi nu are o realitate fizică, este în general acceptat ca obiectiv; există convingerea că o altă civilizaţie, într-o altă locaţie spaţială şi temporală, la un anumit nivel de sofisticare, va dezvolta matematică , şi aceasta va fi esenţialmente echivalentă cu matematica noastră.

Universul Matematic este constituit din concepte matematice ce sunt rafinări de concepte abstracte, generale, provenind exclusiv din ştiinţele naturii. Structură, mişcare, simetrie, spaţiu, cantitate, şansă sunt exemple de concepte generale. Număr, funcţie, grup, spaţiu topologic, varietate riemanniană, probabilitate sunt rafinări ale conceptelor generale susmenţionate şi în acelaşi timp exemple de concepte matematice.

Nu cunosc nici un concept matematic care să nu aibă motivaţie în ştiinţele naturii. Scopul matematicii este de a *descoperi şi înţelege legăturile dintre aceste concepte, generalitatea şi relevanţa lor,* precum şi de a *îmbogăţi universul matematic cu concepte suplimentare şi a descoperi legături noi* între ele. De asemenea scopul matematicii este de a *formula întrebări şi de a produce răspunsuri cantitative şi calitative cu privire la aceste concepte şi la legăturile dintre ele .*

Aşa cum ştiinţele naturii oferă predicţii fenomenologice şi îşi dovedesc utilitatea prin exersarea acestor predicţii, teoremele de matematică oferă concluzii cantitative şi calitative cu privire la posibile interacţiuni între concepte matematice şi îşi dovedesc utilitatea prin acurateţea anticipărilor cantitative şi calitative asupra acestor interacţiuni.

Elementele sus menţionate pun matematica în rîndul ştiinţelor.

Nici una din ştiinţele naturii sau disciplinele tehnice nu pot fi abordate fără un anumit nivel de cunoştinţe şi abilităţi matematice. Aceasta face din matematică un instrument necesar ştiinţelor naturii şi tehnologiei, dar nu defineşte calitatea de ştiinţă a matematicii. Pentru cea mai mare parte din nematematicieni, matematica este cunoscută pentru rolul ei de *instrument* şi mai puţin pentru calitatea ei de *ştiinţă*.

1.2. Artă

În procesul de căutare a noului, matematica ca şi arta foloseşte reprezentări, analogii şi simboluri, şi solicită aptitudini intelectuale în parte asemănătoare cu arta. Spre exemplu, inspiraţia, intuiţia, imaginaţia, talentul au un rol deosebit în matematică ca şi în artă , şi mai mic în ştiinţă, iar şansa are un rol minor în matematică şi în artă , şi un rol mult mai mare în ştiinţă.

Abilitatea de a crea analogii este la fel de importantă în matematică ca şi în artă. În matematică , ca şi în artă, rezultatul nu este în general proporţional cu efortul depus pentru obţinerea lui.

Generalitatea rezultatului în matematică este comparabilă cu anvergura simbolică în artă. Esteticul intern este un factor important în determinarea valorii rezultatului matematic, iar rezultatul matematic este adesea mai mult creaţie şi mai puţin descoperire. Creaţia matematică reflectă personalitatea creatorului, în timp ce descoperirea ştiinţifică mai puţin.

A produce ori consuma matematică implică adesea o emoţie estetică, comună cu cea avută practicând sau admirând pictură sau muzică. Există rezultate de matematică de o deosebită frumuseţe, a căror contemplare sau prezentare produce o satisfacţie specială. Pentru mine, a prezenta demonstraţia existenţei a numai 5 poliedre regulate în spaţiul cu trei dimensiuni, tetraedrul, cubul, octaedrul, dodecaedrul, icosaedrul, sau demonstraţia formulei lui Cauchy, sau a prezenta clasificarea algebrelor Lie simple sau a catastrofelor elementare în patru parametri sunt plăceri asemănătoare cu audiţia unei partituri de muzică.

Elementele sus menţionate pun matematica într-o poziţie similară cu arta.

1.3. Limbaj

În forma finală, un rezultat matematic este un silogism, mai mult sau mai puţin complicat, între concepte. Din această perspectivă, naivă dar legitimă, se poate afirma că de îndată ce conceptele matematice au fost degajate şi toate relaţiile principale între concepte (axiomele) au fost stabilite, un rezultat matematic (teoremă) poate fi obţinut în mod sigur (într-o perioadă de timp mai lungă sau mai scurtă, proporţionlă cu lungimea silogismului). Aşadar matematica apare ca un proces de elaborare a unui *limbaj* (constituit din concepte şi legături între ele) şi de dezvoltare a unei *literaturi* în acest limbaj.

Dintr-o altă perspectivă, matematica poate fi privită ca o colecţie de limbi capabile să descrie *universul matematic*, aşa cum limbile vorbite (engleza, romāna, chineza) sunt capabile să comunice experienţă umană. În principiu, aceeaşi experienţă umană poate fi comunicată (cu mai multă sau mai puţină uşurinţă) în oricare din limbile vorbite; cu toate acestea, o limbă poate fi mai bine adaptată decît alta. Revenind la matematică, limbajul algebrei comutative (algebră, homomorfism, modul proiectiv etc.) şi limbajul topologiei (spaţiu topologic, funcţie continuă, fibrare vectorială etc.) sunt ambele capabile să descrie geometria varietăţilor algebrice şi cea a varietăţilor riemanniene. Limbajul algebrei comutative este mai bine adaptat pentru geometria varietăţilor algebrice, iar cel al topologiei (geometriei diferenţiale) pentru geometria varietăţilor riemanniane. Algebra comutativă şi topologia pot fi privite ca două din limbajele principale ale matematicii. Din ambele perspective, matematica poate fi văzută ca un limbaj sau o colecţie de limbaje. Pentru majoritatea nematematicienilor (cu cunoştinţe generale de matematică), calitatea de *limbaj* a matematicii are mai mult de a face cu rolul ei de instrument (menţionat în 1.1) decât cu consideraţiile anteriore.

1.4. Mod de gândire

Precizia formulării enunţurilor, corectitudinea "rezultatelor" din punctul de vedere al modului în care sunt derivate din informaţia ce le precede sunt caracteristici ale matematicii invidiate de orice alt domeniu de activitate intelectuală şi adesea identificate cu esenţa matematicii. Mai mult, în momentul în care într-un domeniu de ştiinţă un nivel ridicat de precizie şi rigoare este realizat, respectivul domeniu este adesea considerat şi ca domeniu de matematică (spre exemplu lingvistică matematică, economie matematică, biologie matematică etc.).

Există noţiunea de *precizie matematică* (rigoare în concluzii, precizie în definiţii) şi cea de *minte matematică* (nu totdeauna fără conotaţii peiorative); nici una din aceste noţiuni nu are de a face cu *Universul Matematic*, deci direct cu matematica, dar se referă la un mod de gândire adesea identificat (abuziv) cu *Matematica*.

2. DOMENIILE TRADIŢIONALE DE MATEMATICĂ, ALTE DIVIZIUNI ALE MATEMATICII

2.1 Algebră versus analiză versus geometrie

În toate ştiinţele naturii domeniile reflectă problematica studiată. Spre exemplu în fizică, fizica solidului, fizica energiilor înalte, teoria gravitaţiei etc. indică cu claritate probleme de studiu bine precizate. În artă, domeniile reflectă moduri de expresie, ca pictură, muzică, sculptură, literatură.

Tradiţional, algebra, geometria şi analiza reprezintă cele trei mari domenii ale matematicii. În trecut, împreună cu combinatorica, mecanica, teoria probabilităţilor şi topologia, ele descriau în mare măsură problematica matematicii. Diviziunea matematicii în domeniile sus menţionate a fost mai utilă pentru nematematicieni decât pentru matematicieni.

În prezent, matematica este divizată în 70 de domenii şi 150 de subdomenii (a se vedea indexul domeniilor de matematică din Mathematical Reviews), clasificare probabil utilă nematematicienilor şi puţin relevantă, dacă nu incomodă, matematicienilor În matematica zilelor noastre, aproape orice problemă interesantă poate fi revendicată de două sau trei dintre cele 7 domenii tradiţionale şi de cel puţin 10 dintre cele 70 de domenii din noua clasificare. Diviziunea sus menţionată este acceptată de matematicieni mai mult din nevoia unui mod sistematic de *înregistrare* şi *compartimentare* a rezultatelor cercetării şi de *acces* rapid la aceste rezultate. Natura rezultatelor matematicii contemporane face însă succesul *compartimentării* şi *accesului* discutabil.

Deşi puţin relevante pentru clasificarea problematicii matematicii contemporane, este surprinzător cât de relevante sunt cele trei domenii, algebra, geometria şi analiza, pentru clasificarea matematicienilor şi a modului de a face matematică. În zilele noastre, nu matematica este divizată în algebră, geometrie şi analiză, ci matematicienii sunt clasificabili în algebrişti, analişti sau geometri, şi nu după problemele ce le studiază , ci după talent şi abilitate.

Talentul algebristului constă în abilitatea de a stabili egalităţi, de a recunoaşte identităţi, în timp ce a analistului este de a stabili şi descoperi inegalităţi şi a face estimări. Abilitatea de a recunoaşte identităţi trebuie înţeleasă în sens larg, ca abilitate de a recunoaşte aceeaşi structură în diverse ipostaze, iar abilitatea de a stabili estimări, ca abilitate de a intui şi verifica relaţii de magnitudine. Ceea ce caracterizează geometrul este abilitatea de a reprezenta spaţial, de a gândi în termeni de figuri şi imagini, chiar şi în probleme ce nu conţin direct elemente spaţiale. Din acest punct de vedere .

E. Cartan a fost un algebrist, deşi toată opera lui matematică este dedicată geometriei,

A. Grothendieck şi D. Hilbert sunt algebrişti, deşi ambii au adus contribuţii fundamentale în analiză,

S. S. Chern, unul din părinţii geometriei moderne, este analist şi algebrist

S. T Yau (medaliat Fields 1982) este analist, deşi numele lui este legat de soluţionarea unor probleme faimoase de geometrie,

M. Gromov şi W Thurston (medaliat Fields 1982) sunt geometri, deşi primul a revoluţionat teoria grupurilor

Caracterizarea anterioară a abilităţii de algebrist, analist şi geometru este împărtăşită de mulţi matematicieni; citatele următoare confirmă aceasta.

În vizită în România la sfîrşitul anilor 60, A. Grothendieck a fost întrebat de ce a părăsit analiza funcţională (pe care o revoluţionase în anii 50) în favoarea geometriei algebrice. Răspunsul lui (după câte îmi amintesc) a fost: *"am realizat că sunt mult mai bun în a stabili egalităţi decât inegalităţi"*

Într-un recent articol intitulat "Will mathematics survive? Report on the Zurich Congress", reprodus în The Mathematical Inteligencer 1995, V. Arnold (cunoscut matematician din şcoala sovietică), referindu-se la trei din medaliaţii Fields (J.Bourgain, J Yocooz şi P.Lions), toţi analişti, notează: *"all three of them noted for the art of manipulation of inequalities"*.

În vizită la O.S.U. în 1979, Armand Borel (cunoscut matematician din Princeton) mi-a relatat că a devenit conştient de calităţile excepţionale ale lui S.T Yau, de la o primă lucrare submisă de acesta la una din revistele la care Borel era editor. Comentariul lui Borel a fost : *"În acea lucrare, Yau demonstra o inegalitate despre gradientul unei funcţii (din care în mod magic obţinea rezultate remarcabile de geometrie diferenţială; am înţeles ce analist promiţător se ascunde în acest tânăr"*.

În zilele noastre, activitatea matematică în domenii ca geometria riemanniană, complexă , Kaehleriană, spectrală este realizată în cea mai mare parte de matematicieni cu talent de analişti, activitatea în topologia varietăţilor de dimensiune 3 şi 4 şi în teoria grupurilor infinite este realizată de geometri, iar activitatea în legătură cu teoria funcţiilor analitice complexe de mai multe variabile şi de topologie algebrică, în mare măsură, de algebrişti. Dacă această inconsistenţă poate părea paradoxală nematematicianului, ea este acceptabilă şi normală pentru matematician.

Alte diviziuni ale matematicii :

În ştiinţă activitatea de cercetare se desfăşoară pe două planuri în opoziţie dar nu disjuncte i) fundamental versus aplicativ , ii) teoretic versus experimental.

Analogul acestor opoziţii nu există în artă. În matematică analoagele acestor opoziţii sunt : matematică pură versus matematică aplicată, matematică speculativă versus matematică concretă, matematică teoretizantă versus matematică problematizantă.

În cele ce urmează voi discuta fiecare din aceste opoziţii, precum şi o altă opoziţie interesantă: matematică *soft* versus matematică *hard*.

2.2. Matematică pură versus matematică aplicată

Diviziunea matematicii în pură şi aplicată este analoagă diviziunii chimiei sau biologiei în fundamentală şi aplicată. În contextul acestei analogii, termenul de matematică pură este incorect folosit (termenul corespunzător fiind matematică fundamentală). Asocierea cu adjectivul "pură" poate sugera că matematica pură ignoră problemele ridicate de alte domenii de activitate intelectuală, percepţie existentă în lumea nematematică. Interacţia dintre geometria diferenţială, topologie şi fizică sau cea dintre geometria algebrică, teoria numerelor şi teoria codurilor sunt numai două din foarte multele exemple ce contrazic această percepţie. Dacă pentru un nematematician deosebirea dintre matematica aplicată şi matematica pură este (lingvistic) evidentă, pentru un matematician diferenţierea nu este deloc simplă, iar pentru mulţi matematicieni este inexistentă sau considerată o *problemă prost formulată.*

În analogie cu chimia sau biologia, matematica aplicată ar trebui să presupună *specificarea unor tehnici matematice de maximă utilitate în ştiinţele naturii, tehnologie, economie, precum şi specificarea unor probleme din aceste domenii pentru care tehnicile menţionate sunt eficiente.* Datorită dinamismului atât al matematicii cât şi al celorlalte domenii, o asemenea specificare va fi totdeauna incompletă şi desuetă, şi orice încercare de a explica ce *nu* *este matematică aplicată* èste uşor discreditabilă. În zilele noastre, diferenţa dintre matematica pură şi cea aplicată constă în modul în care cele două sunt finanţate. Prima, matematica pură (fundamentală), este finanţată în contextul activităţii academice, a doua, în contextul ştiinţelor naturii şi tehnologiei şi în mare măsură de industrie, armată şi business. În articolul menţionat anterior, V.Arnold merge mai departe, afirmând că nu există nici o distincţie ştiinţifică între matematica pură şi aplicată , ci numai socială. *"Matematicianul pur este plătit să facă matematică , în timp ce matematicianul aplicat să rezolve o problemă precizată. Dacă un specialist în teoria numerelor ar fi plătit să rezolve problema lui Fermat, atunci teoria numerelor ar fi matematică aplicată, precum este considerată teoria corpurilor finite şi a curbelor peste corpuri finite, datorită finanţării de cercetări în aceste domenii de către C.I.A, K.G.B şi alte agenţii similare pentru scopuri de cryptografie"*.

După cum este greu de separat matematica aplicată de matematica fundamentală , este şi mai greu de specificat necesarul pentru pregătirea profesională a unui viitor expert în matematică aplicată. Cu toate acestea, contrar intereselor matematicii ca ştiinţă şi exclusiv din motive politice, în multe universităţi din America şi Europa există departamente de matematică aplicată separate de departamentele de matematică. În mare măsură această separare este generată de concurenţa pentru resurse financiare şi influenţa administrativă.

2.3. Matematică speculativă versus matematică concretă

Această diferenţiere a apărut prin analogie cu diferenţierea dintre fizica teoretică şi fizica experimentală (într-un articol al lui F Quinn şi A. Jaffe apărut în B.A.M.S în 1993) şi are la bază modul în care matematicianul produce matematică nouă. Spre deosebire de o bună parte a ştiinţelor naturii, unde descoperirea este adesea instantanee şi neanticipabilă, în matematică, ca şi în fizica modernă, rezultatul (descoperirea) este în general prezis(ă). Într-o primă fază, rezultatul este bănuit, după care este căutată evidenţa şi, în caz că există suficientă, bănuiala intră în faza de "conjectură" Ultima fază este cea de demonstrare sau infirmare a conjecturii, care în viziunea multor matematicieni este de fapt Matematică. În fizică transformarea "bănuielii" în conjectură se face de obicei ca o consecinţă logică a unei teorii dezvoltate pe baza unor premise presupuse adevărate sau cel puţin rezonabile, şi aceasta este în general făcută de fizicieni teoreticieni. Rămâne pentru fizicienii experimentatori să confirme sau să infirme conjectura, deci premisele, deci teoria. În matematică, "bănuiala" intră în fază de conjectură fără să fie bazată pe o teorie şi în mare măsură din lipsă de argumente (contraexemple) care să contrazică conjectura. Cu toate acestea, matematicienii se lansează greu în transformarea unei bănuieli în conjectură, dar standarde precise nu există şi nu pot să existe.

Dacă infirmarea unei teorii în fizică este în general fără consecinţă ştiinţifică, infirmarea unei conjecturi matematice celebre poate fi chiar mai importantă decât confirmarea ei. În general infirmarea unei conjecturi înseamnă descoperirea unei complexităţi adiţionale, şi implicit îmbogăţirea matematicii.

Cele două faze, *bănuiala cu producerea de evidenţă şi conjectura împreună cu un plan realist de atac al conjecturii, reprezintă matematica speculativă*, în timp ce demonstrarea conjecturii propriu-zise sau infirmarea ei reprezintă matematică concretă. Conjectura în sine, fără a fi sprijinită de o schemă de demonstraţie sau de o puternică evidenţă nu se califică ca matematică speculativă. Exemple de matematică speculativă sunt. programul Langlands, matematica lui E. Witten, structura varietăţilor de dimensiune 3 după Thurston.

În ciuda admiraţiei pentru vizionari, excesul de matematică speculativă, lipsit de rezultate de matematică concretă, discreditează cercetătorul.

Există şi o accepţie peiorativă a conceptului de matematică speculativă; prin matematică speculativă, nematematicienii şi o parte din matematicieni înţeleg matematică neriguroasă, rezultate nesatisfăcător demonstrate, cu şansă de a fi incorecte. Personal consider matematica speculativă numai în prima accepţie, discutată anterior.

2.4. Matematică teoretizantă versus matematică problematizantă

Este indiscutabil că problemele constituie motorul matematicii. Rezolvarea problemelor, excepţie cazul în care acestea sunt simple exerciţii şi nu "probleme", este un proces adesea lung, ce necesită crearea de noi tehnici şi teorii, şi chiar de noi domenii. De cele mai multe ori aceste noi teorii depăşesc scopul iniţial, devenind interesante prin ele înseşi şi generând noi probleme sau facându-se utile în alte probleme. Spre exemplu, teoria schemelor, coomologia etală şi coomologia l-adică au fost create pentru un scop precis: soluţionarea conjecturilor lui Weil. Ulterior au fost dezvoltate şi aplicate în multe alte probleme de geometrie algebrică şi în prezent constituie capitole esenţiale ale oricărui curs modern de geometrie algebrică.

Dezvoltarea şi crearea de noi tehnici şi teorii este un proces continuu în matematică şi nu este întotdeauna determinat de soluţionarea unei conjecturi.

Pentru mulţi matematicieni a produce matematică este exact acest proces, iar soluţionarea problemelor, rezolvarea conjecturilor este o recompensă oferită din când în când cercetătorului pentru efortul de a dezvolta tehnici şi teorii. Pentru aceşti matematicieni interesul în probleme sau conjecturi este comparabil cu cel pentru un "premiu", mai mare sau mai mic, depinzând de ego-ul personal. Există matematicieni respectaţi pentru matematica lor, al căror nume nu este legat de soluţia niciunei conjecturi faimoase

Pentru alţi matematicieni matematica este constituită esenţialmente din probleme, iar importanţa tehnicilor şi teoriilor depinde numai de succesul aplicării lor în rezolvarea problemelor existente.

Cele două percepţii nu sunt atât de depărtate pe cât par şi este adesea cazul că acelaşi matematician, de-a lungul carierei, să experimenteze alternativ ambele percepţii. Ele duc însă la următoarele două atitudini:

1) Matematicianul este predispus să dezvolte tehnici şi teorii interesându-se de probleme în măsura în care ele pot fi rezolvate cu aceste tehnici şi teorii. Matematica dezvoltată cu această atitudine este matematică orientată teoretic sau matematică teoretizantă.

2) Matematicianul este predispus să caute probleme pe care să le rezolve, utilizând tehnicile şi teoriile disponibile, perfecţionând aceste tehnici pe măsura necesarului. Matematica dezvoltată cu această atitudine este orientată pe probleme, matematică problematizantă.

În prezent matematica problematizantă este predominantă. Pentru aproape 30 de ani, pînă la începutul aniilor 1980, sub influenţa curentului bourbakist, matematica teoretizantă a fost predominantă şi este de aşteptat ca în 20 de ani de acum înainte orientarea teoretizantă să redevină predominantă, alternarea celor două atitudini fiind o consecinţă naturală a procesului de cercetare.

Crearea de tehnici şi teorii şi rezolvarea de probleme nu pot exista una fără alta. Cea mai mare parte a marilor matematicieni sunt responsabili pentru contribuţii atât în rezolvare de probleme cât şi în dezvoltare de noi tehnici şi teorii. Există însă matematicieni respectaţi care nu au avut răbdarea necesară să dezvolte o teorie suficient de departe încât să-şi lase numele legat de ea, dar al căror nume este reţinut de istorie pentru rezolvarea unor probleme importante.

Prevalarea matematicii orientate teoretic sau problematic este vizibilă în structura curriculum-ului necesar iniţierii în matematică a viitorului cercetător şi a felului în care acesta abordează cercetarea. În anii 60 puţini matematicieni (europeni) începeau să facă cercetare înainte de a fi acumulat o cultură matematică solidă. În zilele noastre cea mai mare parte din tineret intră în cercetare fără un minimum de cultură matematică, urmând să-şi facă această cultură pe măsura nevoilor procesului de cercetare.

2.5. Matematică *soft* versus matematică *hard*

Matematica "soft" este matematica conceptuală, fără calcule elaborate, în general operând mai mult cu concepte decât cu cantităţi. Există o uşoară conotaţie peiorativă în virtutea sensului literar al cuvântului "soft", dar această conotaţie este minimă , şi numai în legătură cu domenii ca teoria categoriilor, lingvistică matematică etc. Atât matematica geometrilor cât şi a algebriştilor este mai apropiată de "soft" decât de "hard", dar aceasta nu în măsură să caracterizeze algebra sau geometria ca matematică "soft".

Noţiunea de matematică "hard" este asociată cu matematica bazată pe formule sau estimări, în general pe calcule dificile, posibil algebrice (spre exemplu tabelul de caractere al grupurilor simple finite). Datorită unui exces de matematică structurală există astăzi un exces de stimă pentru matematica "hard" Este de remarcat că multe dintre rezultatele matematice importante sunt sau au fost considerate definitive în momentul în care au căpătat o soluţie soft.

Unul din cele mai originale rezultate matematice ale lui D. Hilbert este stabilirea faptului că subinelul polinoamelor de n variabile invariante la acţiunea unui grup finit de permutări ale variabilelor este finit generat. Demonstraţia lui Hilbert este "soft" şi poate fi prezentată pe două pagini. Toate rezultatele anterioare (demonstrarea acestui rezultat în cazul $n = 2,3,4$), deşi parţiale, se bazau pe calcule enorme cu polinoame invariante, reprezentând matematică "hard".

3. VALOARE ÎN MATEMATICĂ

3.1. Cum şi cine decide valoarea rezultatului matematic

Pe perioadă lungă valoarea unui rezultat matematic este decisă de timp, în funcţie de *utilitatea rezultatului în afara şi înăuntrul matematicii* şi de *cantitatea nouă de matematică generată de el.*

Pe perioadă scurtă valoarea este decisă de matematicieni.

În anii 70, într-o conferinţă ţinută la Bucureşti, Jean Dieudonné făcea următoarea afirmaţie, care la acea vreme mi s-a părut arogantă şi puţin întemeiată: *"Matematica bună produsă astăzi este cea despre care Serre, Grothendieck, Milnor, Atiyah, ... afirmă că este bună".*

Spre deosebire de artă şi asemănător ştiinţelor naturii, în matematică există suficient consens când un rezultat este bun sau nu, dar mai puţin consens cu privire la cât este de bun.

Problema stabilirii valorii cercetării matematice, mai puţin importantă pentru matematicienii maturi (fiecare din noi avem un răspuns satisfăcător şi de multe ori foarte personal la ce este matematică bună), este deosebit de importantă pentru tineretul care doreşte să facă carieră în cercetare matematică, pentru instituţiile care finanţează matematica (în special matematica fundamentală) şi pentru specificarea unui curriculum minimal în vederea pregătirii unui matematician profesionist.

Există părerea generală că

Deşi valoarea rezultatului matematic nu este proporţională cu efortul depus pentru obţinerea lui, valoarea rezultatelor matematice *per total*, creată într-o perioadă rezonabilă de timp este proporţională cu efortul societăţii (comunităţii); există părerea că într-o comunitate ştiinţifică pentru fiecare matematician bun sunt necesari zece matematicieni mediocri, pentru fiecare matematician foarte bun sunt necesari 10 matematicieni buni, şi pentru fiecare matematician de geniu sunt necesari 100 de matematicieni foarte buni (formularea aceasta aparţine lui C. Foiaş, cunoscut matematician român); personal nu subscriu la această părere, dar ea este împărtăşită de o bună parte a matematicienilor

Un rezultat matematic prea complicat este puţin utilizat şi, în consecinţă, valoarea lui afectată. Personal nu subscriu la criteriul simplităţii, chiar şi în forme relative, dar cred că un rezultat matematic în formă finală trebuie să fie clar şi inteligibil, şi că numai atunci când îndeplineşte aceste caracteristici poate fi considerat definitiv Făcând această afirmaţie colegului Gh. Nenciu (cunoscut fizician şi matematician român) am primit cu promptitudine o reacţie de scepticism ·*"Este adevărat, dar numai dacă rezultatul este simplu"*

Care matematică este considerată bună ?

Cu siguranţă următoarele reprezintă matematică bună:

1. conjecturi importante (i.e. bogate în consecinţe), populare în sensul că atrag atenţia multor matematicieni, dificile (în sensul că au rezistat o perioadă mai îndelungată eforturilor de a fi demonstrate);

2. tehnicile şi teoriile necesare verificării lor;

3. tehnici şi teorii ce produc simplificări substanţiale în demonstraţia unor conjecturi sau produc soluţii noi pentru probleme dovedite de timp ca relevante.

Totuşi numai (cel mult) 20% din matematica produsă este în categoria de mai sus. Care sunt însă criteriile pentru a evalua restul matematicii ?

Iată câteva :

1. profunzime şi naturaleţe;

2. originalitate şi frumuseţe;

3. dificultate şi complexitate.

Originalitatea şi frumuseţea estetică, deşi subiective, oferă probabil cel mai convingător criteriu, în lipsa *timpului*, pentru stabilirea valorii rezultatului.

Pentru mine *profunzime* înseamnă relevanţă puţin vizibilă la suprafaţă, dar pentru o mare parte a colegilor mei ea înseamnă dificultate în demonstraţie.

În zilele noastre dificultatea rezultatului este adesea supraevaluată. În articolul menţionat înainte, V. Arnold afirmă:

"... astăzi un rezultat este apreciat nu după cât este de util, ca în alte ştiinţe, ci după cât este de dificil şi puţin accesibil, ca în alpinism".

Lipsa de naturaleţe face o problemă matematică mai dificilă, dar nu necesar mai interesantă. Referindu-se la admiraţia, după părerea lui exagerată, pentru soluţionarea unui număr de probleme şi conjecturi dificile din teoria numerelor (cu privire la scrieri ale numerelor întregi ca sume de numere prime), Arnold, citându-l pe Lev Landau (premiul Nobel pentru fizică), se întreabă:

"... de ce să ne interesăm de sume de numere prime? Numerele prime sunt definite în raport cu înmulţirea, şi nu cu adunarea."

3.2. Tipuri de matematicieni

Mi s-au cerut adesea opinii şi percepţii personale despre matematicieni pe care-i cunosc sau i-am cunoscut (atât ca indivizi cât şi ca matematicieni). Retrospectându-mi observaţiile, pot să spun că matematica tuturor matematicienilor pe care-i cunosc reflectă în mare măsură personalitatea şi înclinaţia lor intelectuală. O asemenea corelaţie este aproape inexistentă în ştiinţă, dar este puternică în artă.

Toţi matematicienii pe care-i cunosc se înscriu în unul din cele patru tipuri:

1) matematicieni de orientare religioasă;

2) matematicieni de orientare sportivă;

3) matematicieni de motivaţie ştiinţifică;

4) matematicieni de motivaţie estetică.

1) Matematicianul de orientare religioasă este dedicat regăsirii unui *pattern* (pe care el sau altcineva l-a descoperit într-un domeniu al matematicii) în alte domenii, situaţii, ipostaze. Altfel spus regăsirii *chipului Domnului* în ceea ce ne înconjoară. Evident în procesul acestor căutări o cantitate de nou

va fi descoperită.

2) Matematicianul de orientare sportivă este dominat de dorinţa de a se dovedi mai bun decît ceilalţi, dorinţă adesea confundată cu dorinţa de a rezolva *problema*. În general are puţină apreciere pentru efortul de a produce un argument alternativ (când există deja unul), puţin interes în a explora implicaţia rezultatului sau a metodei, şi este puţin sensibil la estetica internă a argumentului.

3) Matematicianul de motivaţie ştiinţifică schimbă des domeniile ; motorul cercetării lui este "a înţelege ". Adesea matematica ce o face nu corespunde talentului sau vocaţiei, dar este determinată de nevoia de a înţelege semnificaţia problemei şi eventual de a rezolva problema.

4) Pentru matematicianul de motivaţie estetică a face matematică este în acelaşi timp un mod de existenţă şi exprimare pe sine însuşi. El îşi corelează problematica cu înclinaţia şi talentul, şi evaluează matematica în mare măsură pe baza esteticii interne şi a naturalităţii.

Cea mai mare parte a matematicienilor mari ce îi cunosc aparţin acestui ultim grup.

3.3. Modă şi carismă în matematică

Stiinţa şi arta au avut dintotdeauna nevoie de lideri. În matematică, dificultatea crescândă în a recunoaşte ce este interesant în raport cu neinteresant, dorinţa firească (a cercetatorului) de a lucra în domenii şi pe probleme care să fie apreciate de comunitate şi dependenţa profesională (a cercetătorului) de opinia elitei comunităţii au mărit considerabil influenţa liderilor şi a modei în matematică.

Liderul incontestat în prima parte a secolului 20 a fost D. Hilbert. Influenţa lui în dezvoltarea matematicii, în prima jumătate a secolului, este enormă; după părerea mea este mai puţin bazată pe matematica inventată de el, şi mai mult pe problemele formulate la Congresul Internaţional de Matematică din Paris (care au focalizat activitatea matematică pentru o jumătate de secol), ca şi pe matematica ce a încurajat-o în seminarii la Göttingen. Pentru o jumătate de secol matematica promovată de Hilbert a fost echivalentă cu matematica "bună".

În zilele noastre un lider necontestat este M. Atiyah. În a doua jumătate a acestui secol alţi lideri au fost : A.Weil, A. Grothendieck, iar în matematica sovietică I.S.Gelfand. În prezent, R.Langlands, W Thurston şi E.Witten sunt exemple de matematicieni de mare carismă şi lideri urmaţi de discipoli cu un devotament comun culturilor religioase.

Excesul de bourbakism dintre anii 1950 şi 1975, ca şi protestul antibourbakist dintre 1975 şi 1995 sunt consecinţe ale excesului de influenţă a liderilor şi de conformism faţă de modă. În ciuda acestui exces dezvoltarea matematicii nu a avut de suferit, ba dimpotrivă, a beneficiat de intuiţia genială a unor matematicieni de mare carismă. Nu am nici un exemplu de personalitate carismatică a cărei matematică să nu fie excepţională sau al cărei gust matematic, preluat de "ucenici", să fie mediocru. Cunosc însă matematicieni a căror influenţă a fost întârziată, în ciuda relevanţei şi frumuseţii matematicii create, din lipsa de carismă. Este de asemenea adevărat că influenţa personalităţilor de mare carismă este superioară influenţei personalităţilor de mare originalitate. Dintre matematicienii secolului 20 pe care îi consider de maximă carismă menţionez pe: D.Hilbert, A.Weil, A.Grothendieck, J.P.Serre, M.Atiyah, I.Gelfand, R.Langlands, W Thurston, E. Witten, şi de maximă originalitate pe: H.Poincaré, H.Weyl, J.von Neumann, A. Kolmogorov, J. Milnor, S. Smale, S.Novikov, M. Gromov, A.Connes.

Dintre rezolvitorii de mari conjecturi menţionez pe: S.T.Yau, M. Friedmann, G.Falltings, A.Willes.

4. MATEMATICA ÎN CEA DE-A DOUA JUMĂTATE A SECOLULUI 20

4.1. Rezultate importante

Am fost întrebat adesea de studenţi care sunt descoperirile matematice din a doua jumătate a secolului ce le admir cel mai mult, precum şi care sunt cele mai influente conjecturi de matematică rezolvate în cea de-a doua jumătate a secolului. La prima întrebare răspunsul meu este :

1 Periodicitatea Bott;

2. Descoperirea mai multor structuri diferenţiale pe sfere (Milnor 1956);

3. Descoperirea mai multor structuri diferenţiale pe $\mathcal{R}^4$ (S. Donaldson, M.Friedmann, 1980-82), în opoziţie cu unicitatea structurii diferenţiale pe $\mathcal{R}^n$ $n \neq 4$.

La cea de-a doua întrebare răspunsul meu este:

a) Conjectura Poincaré în dimensiune $n \geq 5$;

b) Soluţionarea problemei Ipoteza Continuului;

c) Conjecturile lui Weil;

d) Conjectura lui Mordell;

e) Conjectura Poincaré în dimensiunea 4;

f) Soluţionarea problemei lui Fermat.

Alte conjecturi importante rezolvate în a doua jumătate a secolului au fost : Invarianţa topologică a claselor Pontrjagin (S.P. Novikov), Problema celor patru culori (Haken, Appel), Conjectura masei pozitive (Yau), Conjectura lui Calabi (Yau), Conjectura lui Bieberbach (de Brange), Conjectura lui Burnside (Zelmanov) etc.

Cele mai importante conjecturi rămase nerezolvate sunt :

1) Ipoteza lui Riemann;

2) Conjectura lui Poincaré (dimensiunea 3) în formularea lui Thurston.

Fiecare din conjecturile sus menţionate au implicat apariţia şi dezvoltarea unor domenii noi şi direcţii noi de cercetare în matematică , ca şi a unei enorme cantităţi de probleme noi.

Conjectura Poincaré în dimensiune mai mare ca 4 a dus la crearea topologiei diferenţiale şi combinatorii (a varietăţilor compacte).

Ipoteza Continuului împreună cu rezultatele de indecidabilitate datorate lui Gödel (obţinute în prima jumătate a secolului) au dus la crearea logicii matematice, iar aceasta a avut un impact considerabil în "computer science".

Soluţionarea conjecturilor lui Weil a schimbat fundamentele geometriei algebrice, făcând teoria schemelor şi coomologia etală capitole de bază ale acesteia, şi punând geometria algebrică în linie cu topologia varietăţilor diferenţiabile.

Rezolvarea conjecturii lui Mordell a maturizat un nou domeniu: *arithmetic geometry*

Soluţionarea conjecturii lui Poincaré în dimensiune 4 a reprezentat începutul unui nou domeniu, topologia varietăţilor de dimensiune mică (3 şi 4), în care idei de fizică statistică şi mecanică cuantică şi-au extins relevanţa în afara fizicii.

Soluţionarea problemei lui Fermat (prea de curând realizată pentru a fi judecată altfel decât că a rezistat eforturilor matematicii pentru mai mult 400 de ani) va duce probabil la încorporarea teoriei curbelor eliptice în bagajul fundamental de matematică (pe picior de egalitate cu teoria curbelor şi suprafeţelor de grad 2, studiate în primii ani de facultate).

În ultimele decade ale acestui secol asistăm la câştigarea unei enorme respectabilităţi pentru câteva subdomenii de matematică, considerate în anii 60 epuizate sau de interes marginal, ca algebra lineară, mecanica hamiltoniană, C^*-algebre, *braid -group*. Renaşterea acestor subdomenii, devenite $K-$ teorie algebrică, topologie simplectică, geometrie necomutativă, *quantum - group* a fost determinată atât de apariţia unei generaţii noi de probleme, cât şi de intuiţia genială a unor matematicieni de mare originalitate ca Quillen, Gromov, Connes etc.

4.2. Matematică şi fizică

Dialogul dintre matematică şi fizică este vechi şi a constituit pentru sute de ani motorul dezvoltării matematicii.

Mecanică şi geometrie simplectică, relativitate şi geometrie riemanniană şi lorenziană, fizică cuantică şi teoria spectrală a operatorilor, particule elementare şi reprezentări de grupuri Lie sunt dialogurile principale între fizica şi matematica secolului 20 pînă în anul 1970. Matematica a fost necesară fizicii atât în predicţie cât şi în calcule, pe scurt a avut şi va continua să aibă aplicaţii în fizică pe aceste linii.

Începând cu anii 70, dialogul dintre fizică şi matematică a intrat într-o nouă fază, ale cărei caracteristici sunt următoarele:

(1) Intrarea neaşteptată în dialog a unor domenii noi de matematică ca teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă şi a spaţiilor Teichmuller, topologia diferenţială şi combinatorică, algebre Lie de dimensiune infinită.

(2) Nu matematica domeniilor sus menţionate (cel puţin până în prezent) are aplicaţii în fizică, ci fizica are aplicaţii în matematică. Astfel matematica generată de teoria Yang-Mills este responsabilă de descoperirea mai multor structuri diferenţiabile pe $\mathcal{R}^4$, iar matematica generată de teoria Seiber-Witten este responsabilă de soluţionarea (de către Mrowka şi Kronheimer) a conjecturii lui Thom (o problemă interesantă în geometria algebrică şi topologia diferenţială rămasă nerezolvată din anii 50), ca şi de demonstraţia unicităţii structurii simplectice pe CP^2 (de către C.Taubes). Idei de fizică statistică şi teoria cuantică a câmpului sunt răspunzătoare pentru o nouă şi vastă sursă de (aparent) noi invarianţi numerici pentru varietăţi de dimensiune 3 şi 4. Teoria cuantică a câmpului a dus la degajarea conceptului de "topological quantum field theory", o nouă sursă de functori şi invarianţi în topologie.

(3) În această nouă fază a dialogului, conceptele matematice relevante fizicii sunt adesea apropiate de concepte deja existente în matematică , dar mai niciodată aceleaşi. Un exemplu este oferit de grupul difeomorfismelor cercului, respectiv de algebra Lie a câmpurilor de vectori ale cercului. Interesant pentru legătura cu fizica nu este grupul sau algebra Lie sus menţionate, ci o extensie centrală a acestora, grupul Bott, respectiv algebra Virazorro. Alte exemple pot fi găsite în teoria geometrică a funcţiilor analitice şi a spaţiilor Teichmuller.

Aceste caracteristici au schimbat caracterul tradiţional al colaborării dintre fizică şi matematică, făcînd în final greu de diferenţiat matematicienii de fizicieni. Rezultate ale acestei colaborări apar publicate atât în reviste de fizică cât şi de matematică. Ca o consecinţă a prezentului dialog şi colaborări dintre matematică şi fizică, în matematică a crescut mult viteza de acţiune, dar s-au diminuat standardele de rigoare.

4.3. Viitorul matematicii în societatea contemporană

În ciuda prezentei vigori şi abundenţe de rezultate noi, viitorul imediat al matematicii nu este foarte promiţator. Motivul, în mod paradoxal, este căderea comunismului.

În lumea ţărilor (numite politic) de est, matematica sub comunism reprezenta singura disciplină care oferea, simultan, libertate de expresie, independenţă (din punct de vedere al resurselor de cercetare) de autoritatea statului şi valoare de întrebuinţare internaţională. Aceste trei calităţi o făceau opţiune atractivă şi preferată pentru tineretul capabil din punct de vedere intelectual. Căderea comunismului înlătură acest avantaj şi pune matematica pe picior de egalitate cu alte domenii de activitate intelectuală. Disciplinele umaniste şi ştiinţele economice, puţin interesante în contextul societăţilor dominate de regim comunist, îşi recapătă justificat atracţia, ba chiar pentru un număr de ani vor beneficia de avantajul "tentaţiei fructului interzis".

Instituţiile în care se desfăşura activitatea de cercetare fundamentală în ţările de est sunt incompatibile cu o societate cu mentalitatea economiei de piaţă , către care, în prezent, se îndreaptă ţările de est, contextul academic rămânând unicul viabil pentru practicarea activitaţii de cercetare matematică; acesta la rândul lui nefiind foarte atrăgător din punctul de vedere al salariilor oferite.

În lumea ţărilor (numite politic) de vest, şi în special în SUA, încetarea războiului rece diminuează considerabil resursele materiale alocate "tehnologiilor militare sofisticate", un principal consumator de matematică fundamentală, în afara universităţilor. SUA traversează o serioasă criză a sistemului de educaţie predoctorală şi în prezent dezbate reorganizarea acestuia. Din lipsa presiunii produse de competiţia pe linie militară şi în prezenţa unei evidente superiorităţi economice a vestului faţă de est, în dezbaterile despre educaţie, cercetarea fundamentală este un parametru cu influenţă întârziată şi va fi considerat pe planul doi. Din nefericire în lumea de vest (cu excepţia Franţei), universităţile şi într-o oarecare măsură agenţiile federale, ca N.S.F şi N.S.A, sunt singurele instituţii interesate în dezvoltarea matematicii noi, deşi multe alte instituţii sunt consumatoare de matematică.

Observaţiile anterioare se refereau la viitorul imediat al matematicii. Pe lungă durată viitorul matematicii este mult mai promiţător Matematizarea este o tendinţă vizibilă în lumea contemporană, iar nevoia unui nivel ridicat de cunoştinţe matematice în ştiinţă şi tehnologie există şi creşte în mod continuu.

Abstract

MATHEMATICS SEEN FROM THE INSIDE AND FROM THE OUTSIDE

Like any domain of intense intelectual activity, mathematics raises basic problems such as: What is it? How do we work with it? What is its usefulness? The answer to these questions is subjective, historical and incomplete and yet always interesting.

The answer to these questions is very important for the decision as to who allocates material resources and how these resources are allocated for this activity. The present speech intends less to answer the problems mentioned above and more to formulate some of their subproblems, with comments based largely on my experience of researcher and teacher I shall present thoughts and information, more or less accessible to the observer, interested but uninvolved, in the competitive process of mathematical research, as well as perceptions of people other than mathematicians who show interest in and who favour mathematics. My speech has three parts: Part one: What is mathematics?, Part two: Mathematics today, Part three: Mathematics and contemporary society.

In the first part the problem to be discussed will be:

1. Is mathematics a science, an art, a language, a way of thinking?
2: Is the mathematical universe real? objective?
Considerations on:
3: the mathematical concept and its place in the mathematical universe will complete this discussion.

In the second part I will tackle the following topics:

1. Traditional mathematical domains, the relevance of the classification of mathematics into algebra, mathematical analysis, geometry, etc.
2: "Value" in mathematics.
3: Mathematicians and results in mathematics.
4: The special relation between mathematics and physics.

Under 1 I will be discussing:

1.1: algebra versus mathematical analysis.
1.2: algebra versus geometry.

1.3: mathematical analysis versus geometry.
1.4: the signifiance of the three fundamental domains inside and outside mathematics. What do the mathematical domains reflect, content? language?, manner of approach?

Under 2 I will explain what I mean by:
2.1: theoretical (fundamental) mathematics versus problem-solving mathematics.
2.2: speculative mathematics versus concrete mathematics.
2.3: pure mathematics versus applied mathematics.
2.4: "soft" mathematics versus "hard" mathematics.
and I will discuss
2.5: types of mathematicians and attitudes in contemporary mathematical research.

Under 3 I will present considerations related to "value" in contemporary mathematical research. I will explain what I mean by:
3.1: good mathematics, useful mathematics, important mathematics.
3.2: originality and relevance in mathematics.
as well as the role played by
3.3: fashion and charisma in mathematics.

Under 4 I shall present:
4.1: thoughts related to a number of charismatic mathematicians and their impact on the development of mathematics (Hilbert, Grothendieck, Gelfand, Atiyah, Thurston, Witten).
4.2: thoughts related to a number of mathematicians of great originality· Riemann, H. Weyl, E. Cartan, Kolmogoroff, Milnor, Smale and their impact on the development of mathematics.
4.3: thoughts related to some of the important mathematical results obtained lately.

In the third part I shall present some considerations on:
1: the role of mathematics as a component of general education (formative, informative).
2: accessibility of mathematics, mathematics for the élite.
3: public perception of mathematics and its importance.
4: mathematics and spiritual freedom, the future of mathematics in Europe (formerly Eastern Europe).
5: financing of mathematics in contemporary society.

Received: 28.10.1995

The Ohio State University
Department of Mathematics
Columbus, Ohio, U.S.A.