

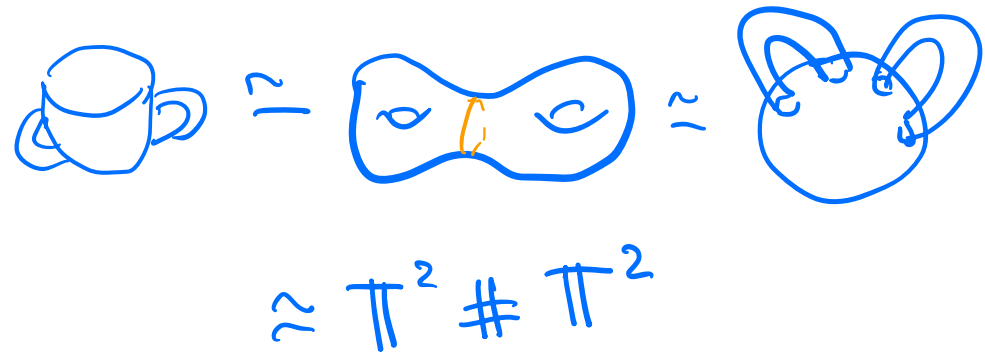
Топологическая классификация поверхностей и хордовые диаграммы

Сергей Владимирович Чмутов

Университет штата Огайо, США

Вторник, 10 июня, 2025

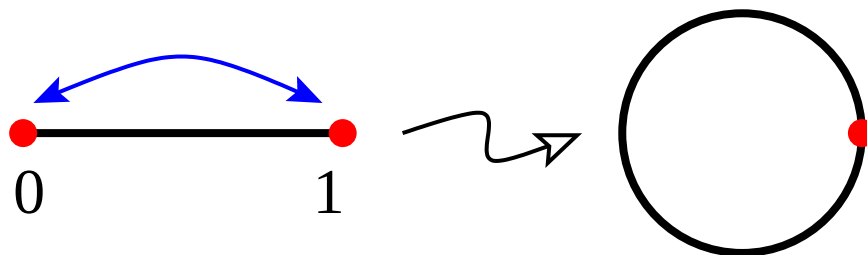
<https://math.okstate.edu/people/segerman/>



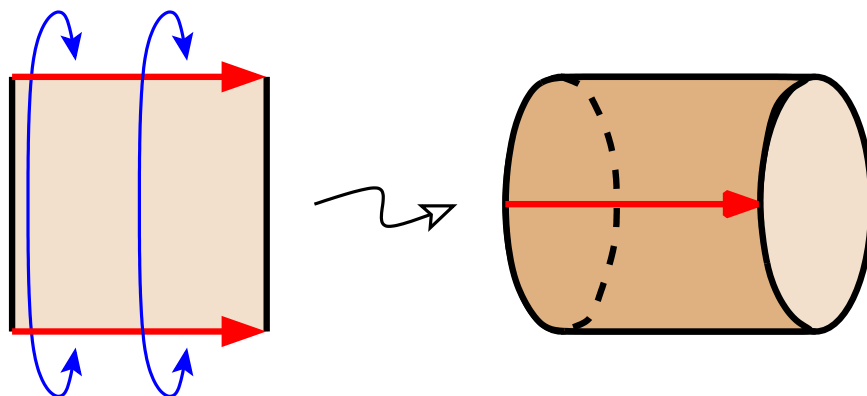
Топологическая классификация поверхностей.

Теорема (ориентируемый случай). Любая связная замкнутая ориентируемая поверхность гомеоморфна сфере с g ручками.
 род

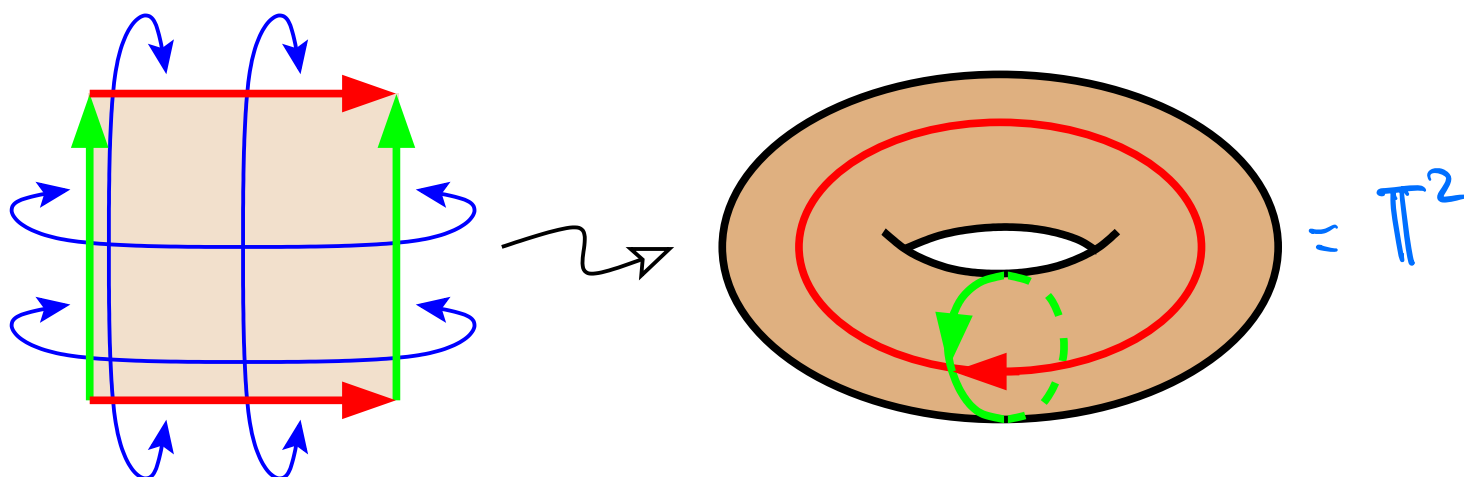
Окружность:



Цилиндр:

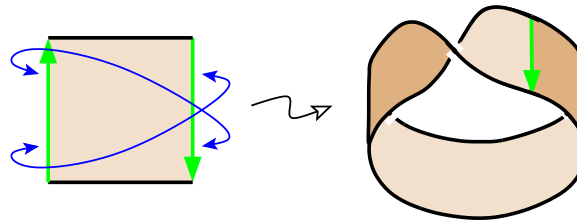


Тор:

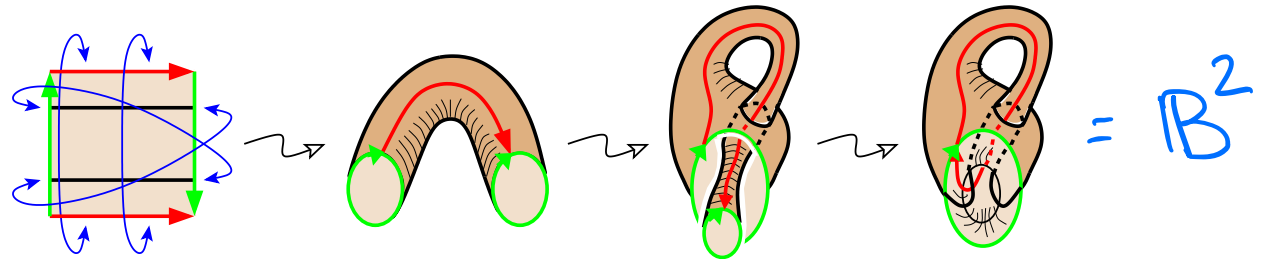


Неориентируемые поверхности.

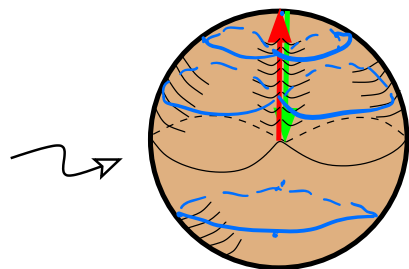
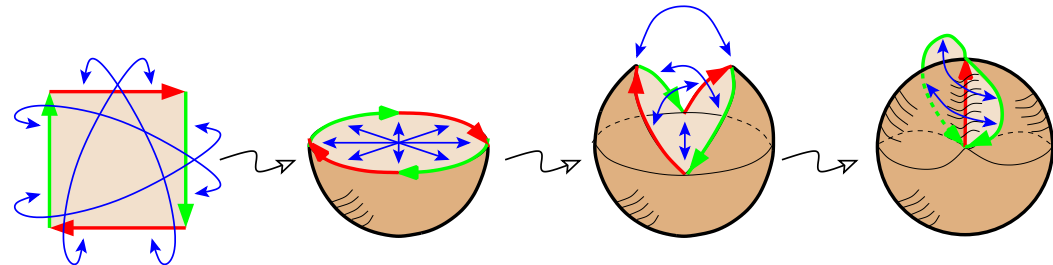
Лента Мёбиуса:



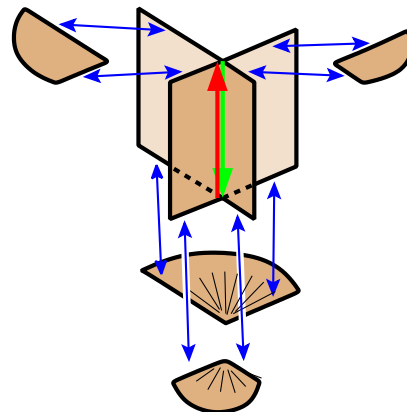
Бутылка Клейна:



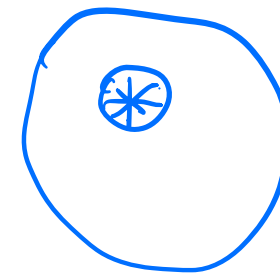
Проективная плоскость:



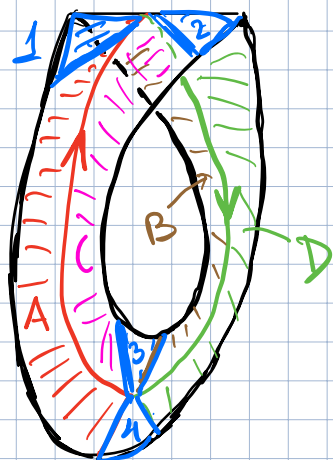
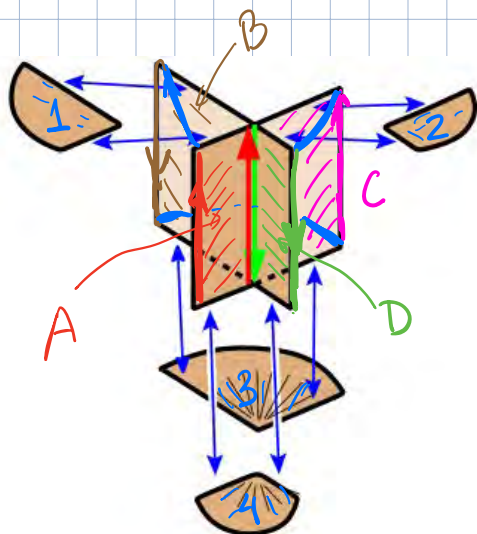
$\mathbb{R}P^2$



$\cong$

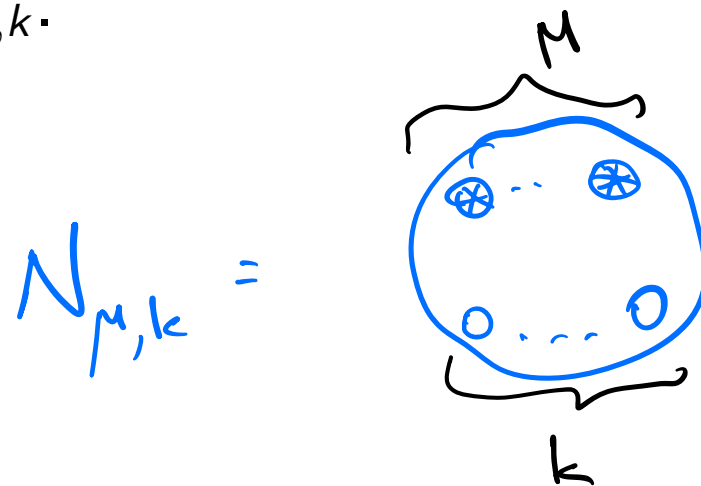
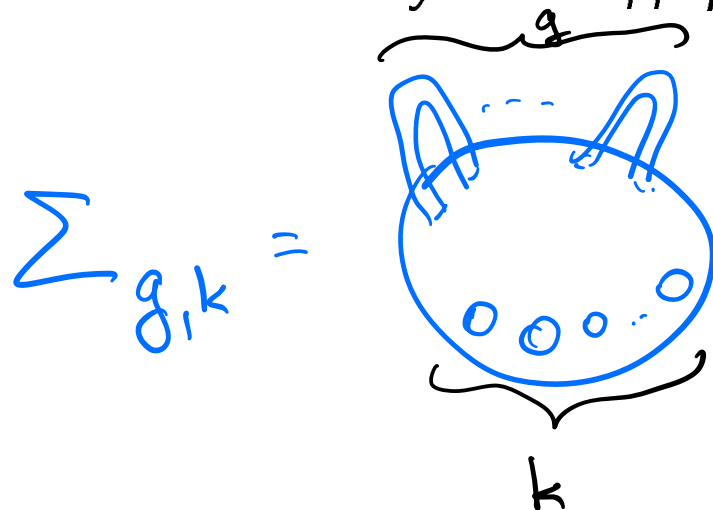


сфера с
плёнкой
Мёбиуса



← Риманова
поверхность
функции $\sqrt{z}$
ТФКП

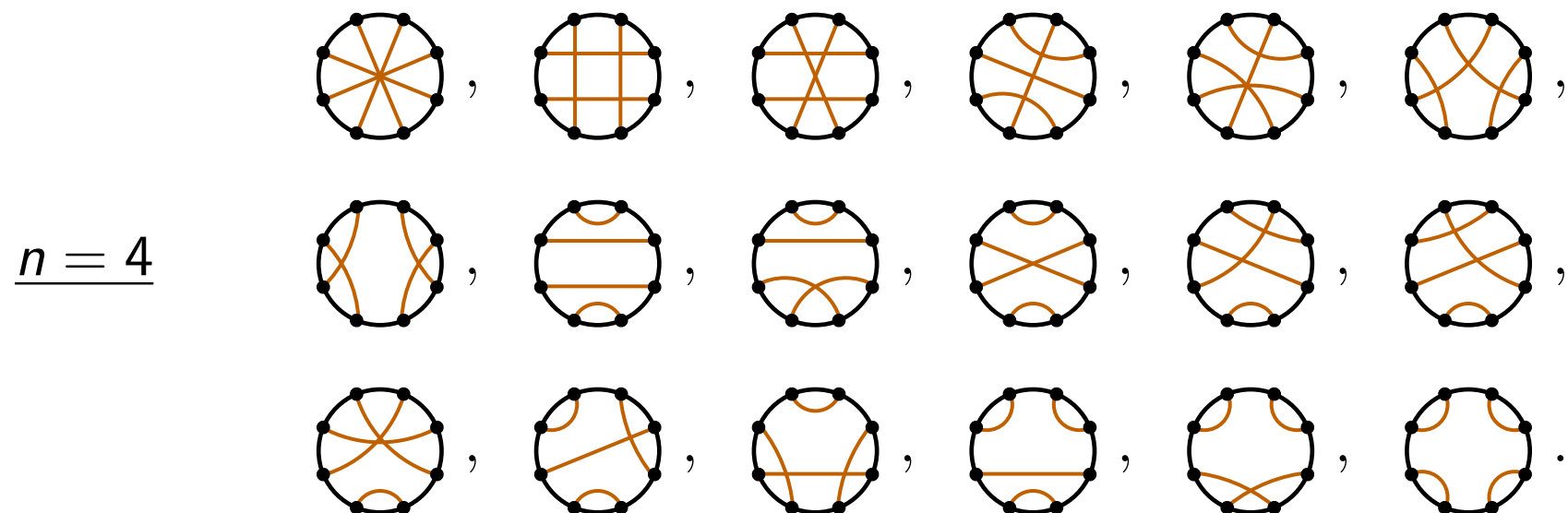
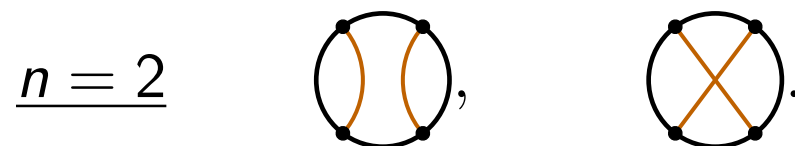
Теорема. Любая связная поверхность гомеоморфна либо сфере с g ручками и k дырками, $\Sigma_{g,k}$, либо сфере с μ пленками Мёбиуса и k дырками, $N_{\mu,k}$.



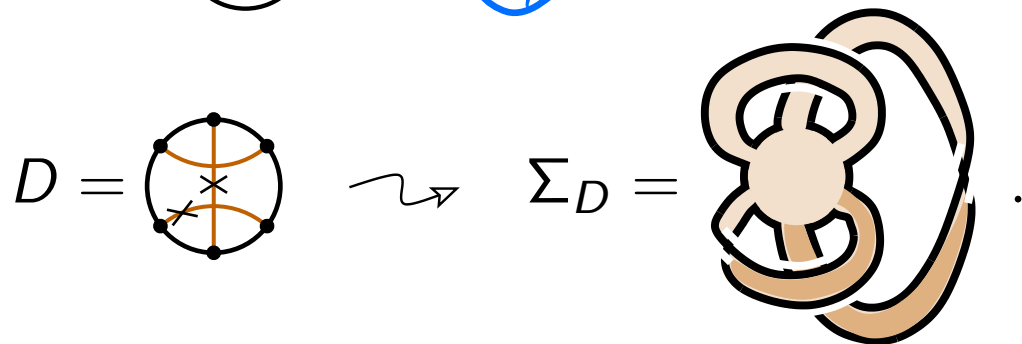
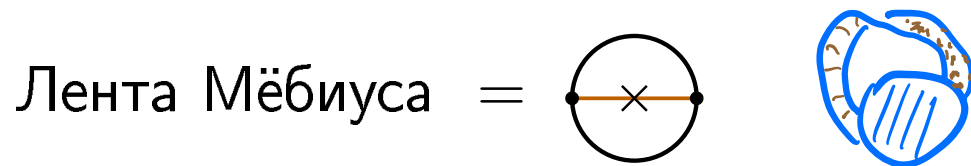
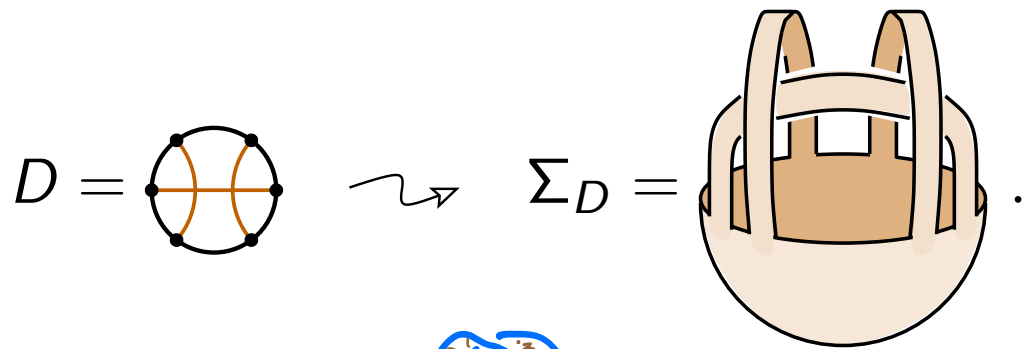
$$\Sigma_{g,0} = \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_g$$

$$\mathbb{B}^2 = N_{2,0} = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$$

Хордовые диаграммы.



Построение поверхности по хордовой диаграмме.

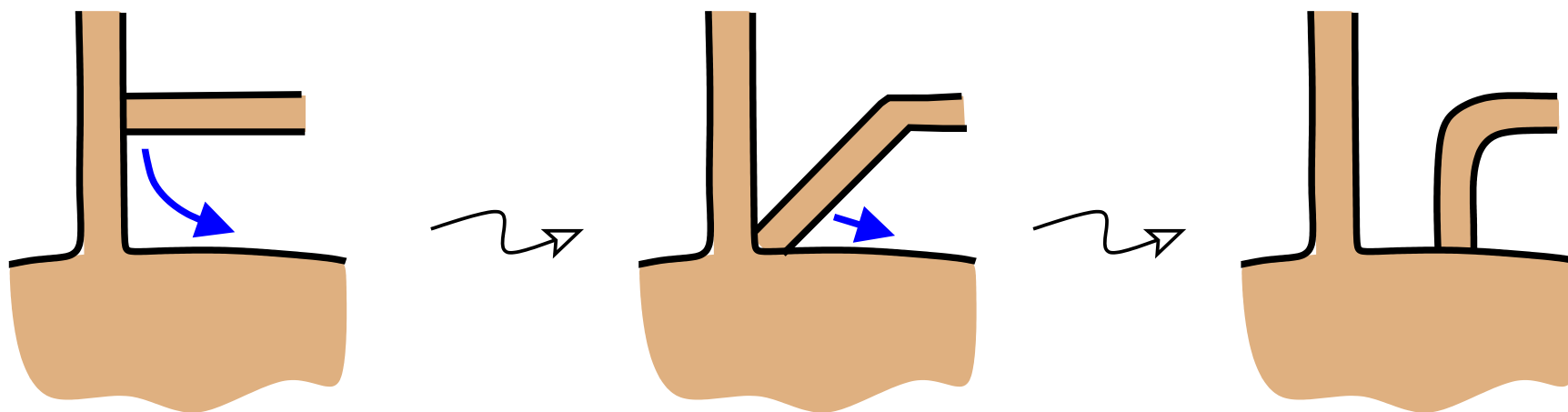


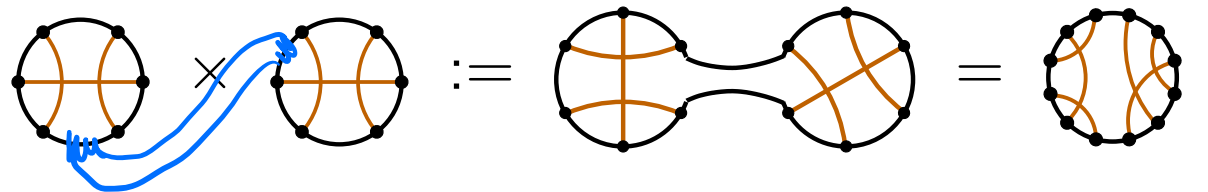
Теорема. *Любая связная поверхность с краем может быть представлена хордовой диаграммой (возможно с перекрученными хордами).*



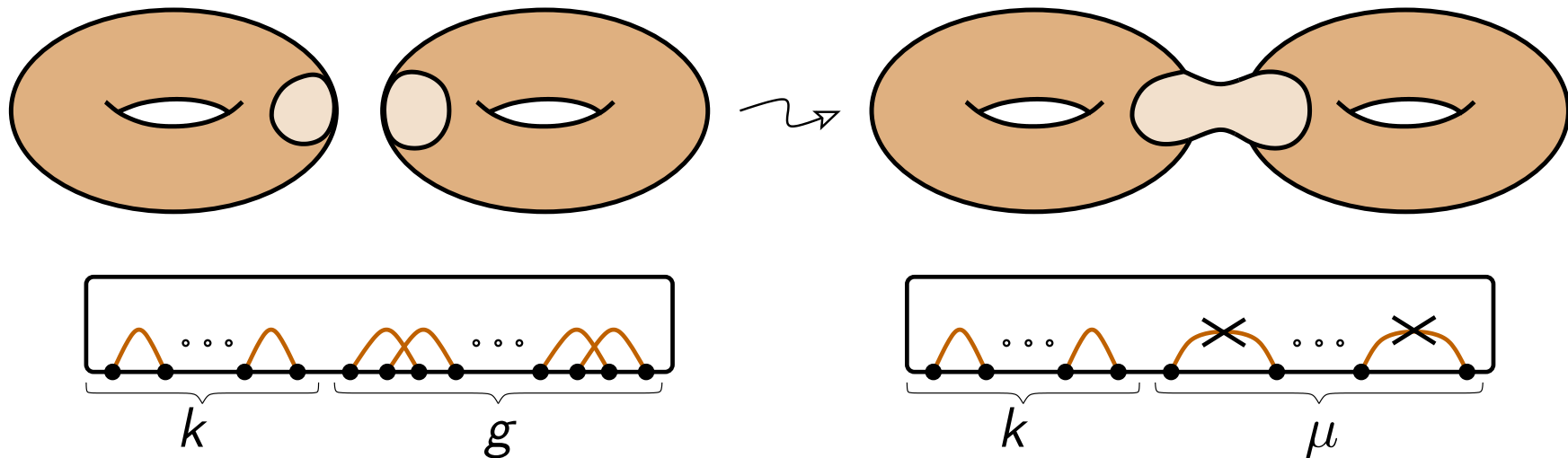
Теорема. Поверхности построенные по двум хордовым диаграммам связанным 2T-соотношением гомеоморфны.

Доказательство.





Лемма. По модулю $2T$ умножение корректно определено.



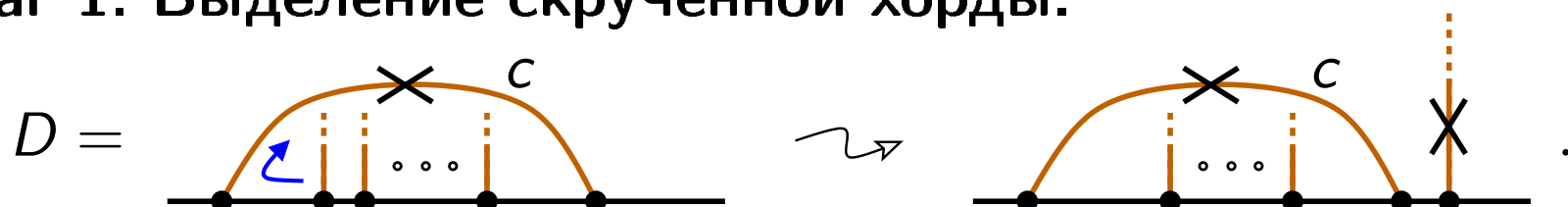
Ориентированный караван
из k “одногогорбых верблюдов”
и g “двугорбых верблюдов”

Нерентированный караван
из k “одногогорбых верблюдов”
и μ “одногогорбых перекрученных
верблюдов”

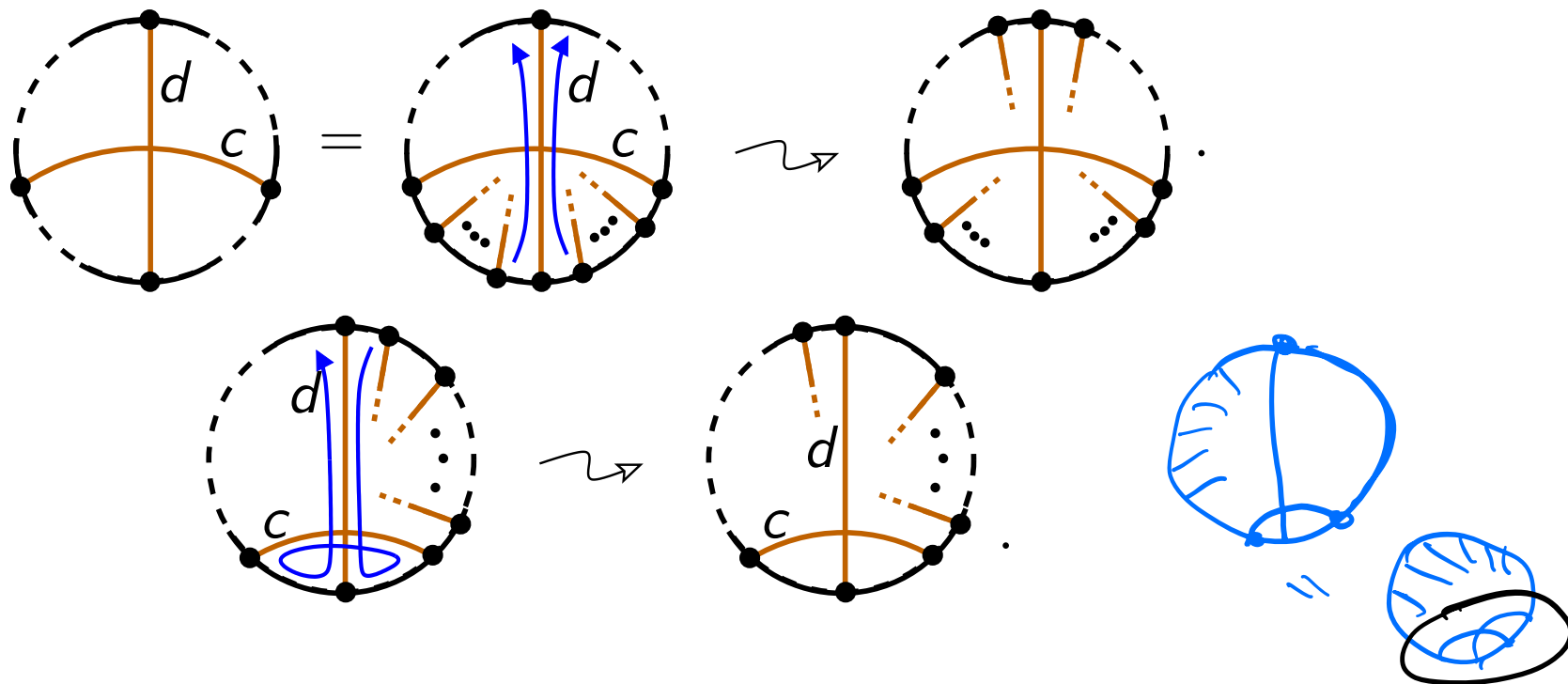
Теорема. По модулю $2T$ любая (возможно перекрученная) хордовая диаграмма эквивалентна каравану.

Доказательство.

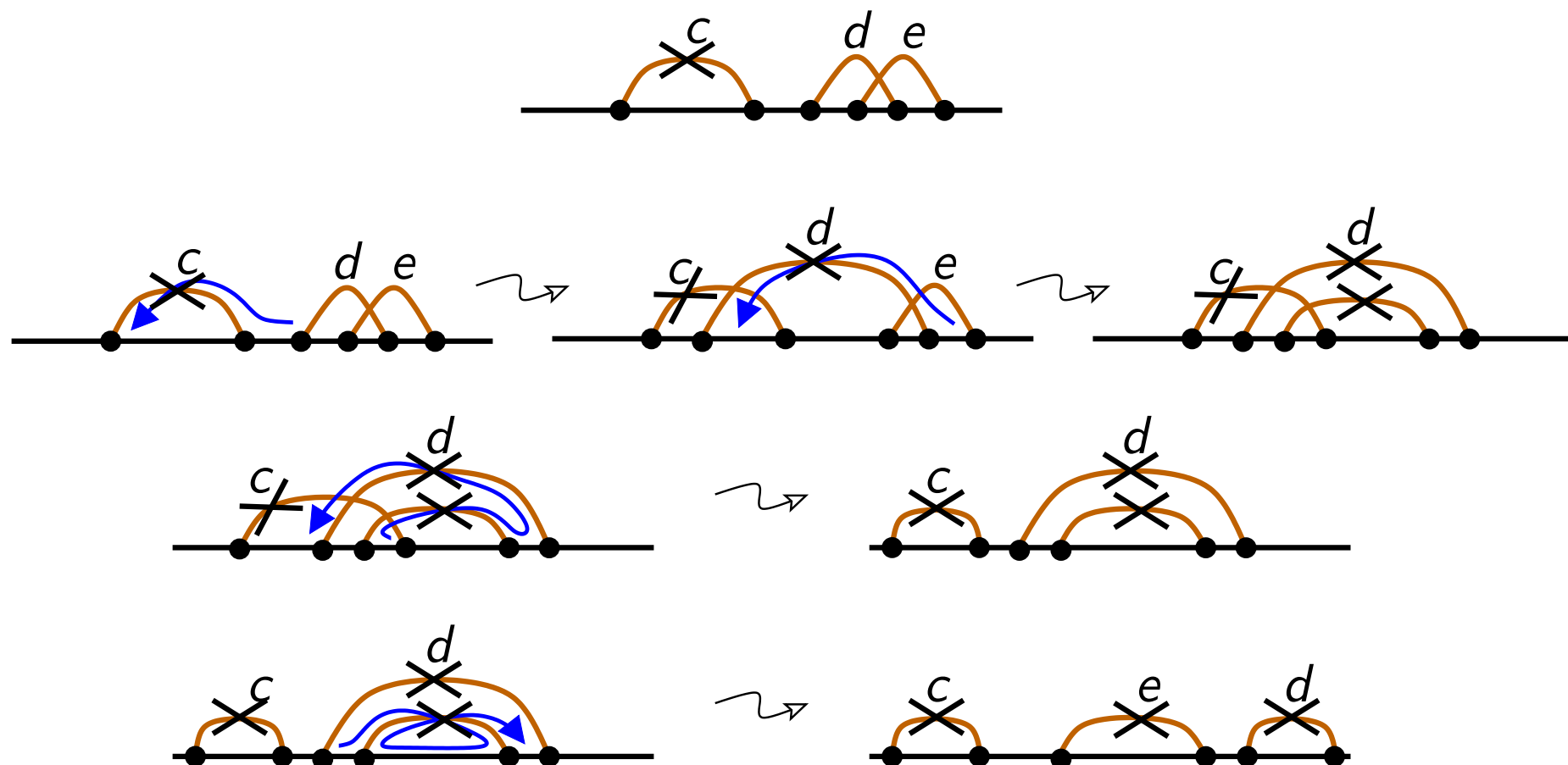
Шаг 1. Выделение скрученной хорды.



Шаг 2. Факторизация “двугорбного верблюда”.



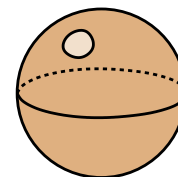
Шаг 3. Перекрученный “одногорбый верблюд” убивает “двугорбого верблюда”.



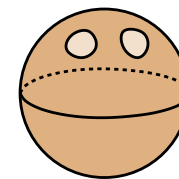
Задачи.

1. Нарисовать поверхности для всех 18 хордовых диаграмм с 4-мя хордами.

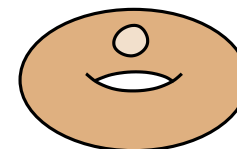
2. Представить сферу с дыркой хордовой диаграммой.



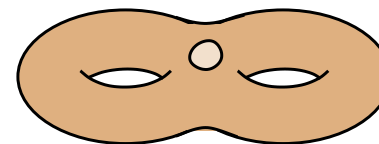
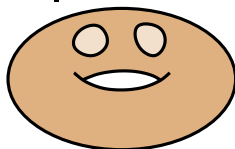
3. Представить сферу с двумя дырками хордовой диаграммой.



4. Представить тор с дыркой хордовой диаграммой.

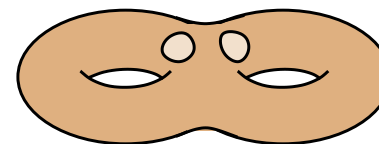


5. Представить тор с двумя дырками хордовой диаграммой.



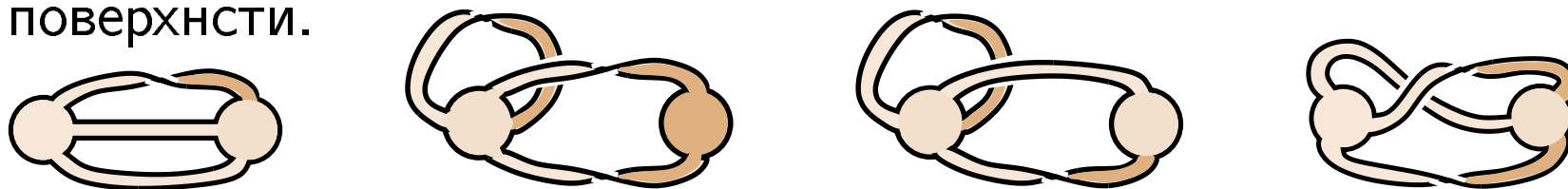
6. Представить крендель с дыркой хордовой диаграммой.

7. Представить крендель с двумя дырками хордовой диаграммой.

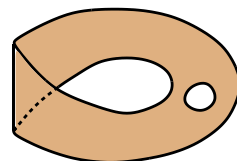


Задачи (продолжение 1).

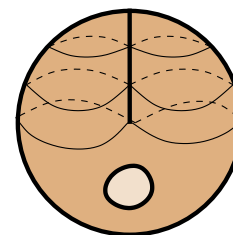
8. Представить хордовыми диаграммами следующие поверхности.



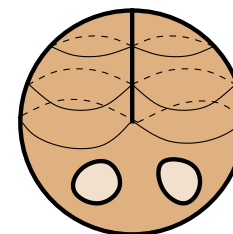
9. Представить ленту Мёбиуса с дыркой (перекрученной) хордовой диаграммой.



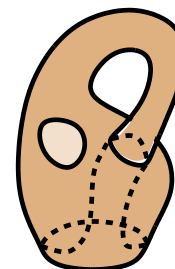
10. Представить проективную плоскость с дыркой (перекрученной) хордовой диаграммой.



11. Представить проективную плоскость двумя дырками (перекрученной) хордовой диаграммой.



12. Представить бутылку Клейна с дыркой (перекрученной) хордовой диаграммой.

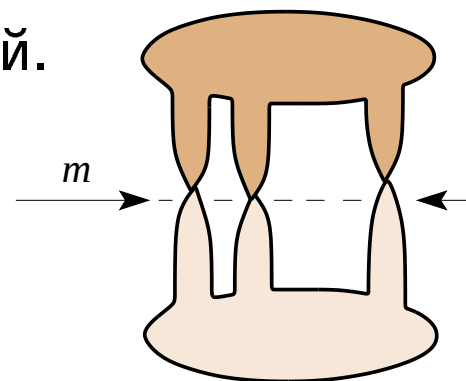


13. Представить бутылку Клейна с двумя дырками (перекрученной) хордовой диаграммой.



14. Доказать лемму, что по модулю $2T$ умножение хордовых диаграмм корректно определено, т.е. не зависит от мест в которых берется связная сумма окружностей.

15. Рассмотрим поверхность.
Выяснить ориентируема ли она.
Найти её род и число дырок.



16. Доказать, что связная сумма проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ и тора T^2 гомеоморфна связной сумме проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ и бутылки Клейна B^2 , а также связной сумме трёх проективных плоскостей.

$$\mathbb{R}P^2 \# T^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# B^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$$

(Подсказка: это шаг 3 доказательства классификационной теоремы.)

СПАСИБО за внимание!!!