Implicitación de superficies vía tropicalización geométrica

María Angélica Cueto

Institut Mittag-Leffler (Suecia)
↓
Columbia University (USA)

Universitat de Barcelona
13 de mayo de 2011

Tres referencias:

Sturmfels, Tevelev, Yu: The Newton polytope of the implicit equation (2007)
Sturmfels, Tevelev: Elimination theory for tropical varieties (2008)
MAC: arXiv:1105.0509 (2011)
(y muchas, muchas más!)

Problema de implicitación: enfoque clásico vs. tropical

Entrada: Polinomios de Laurent $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}]$.

Salida Algebraica: El ideal *primo* I definiendo la clausura Zariski Y de la image de la función:

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \colon \mathbb{T}^d \dashrightarrow \mathbb{T}^n.$$

El ideal I consiste de todos las relaciones polinomiales entre $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Métodos existentes: Bases de Gröbner y resultantes.

- BG: aplicables siempre, pero poco eficientes.
- Resultantes: útiles cuando $n = d + 1$ e I es *principal*, pero su uso es limitado.

Problema de implicitación: enfoque clásico vs. tropical

Entrada: Polinomios de Laurent $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}]$.

Salida Algebraica: El ideal *primo* I definiendo la clausura Zariski Y de la image de la función:

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \colon \mathbb{T}^d \dashrightarrow \mathbb{T}^n.$$

El ideal I consiste de todos las relaciones polinomiales entre $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Métodos existentes: Bases de Gröbner y resultantes.

- BG: aplicables siempre, pero poco eficientes.
- Resultantes: útiles cuando $n = d + 1$ e I es *principal*, pero su uso es limitado.

Salida Geométrica: Invariantes de Y, como la dimensión, el grado, etc.

Problema de implicitación: enfoque clásico vs. tropical

Entrada: Polinomios de Laurent $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}]$.

Salida Algebraica: El ideal *primo* I definiendo la clausura Zariski Y de la image de la función:

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \colon \mathbb{T}^d \dashrightarrow \mathbb{T}^n.$$

El ideal I consiste de todos las relaciones polinomiales entre $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Métodos existentes: Bases de Gröbner y resultantes.

- BG: aplicables siempre, pero poco eficientes.
- Resultantes: útiles cuando $n = d + 1$ e I es *principal*, pero su uso es limitado.

Salida Geométrica: Invariantes de Y, como la dimensión, el grado, etc.

Clave: Podemos calcular estos *efectivamente* usando geometría tropical.

$\boxed{\textbf{HOY: } \text{Estudiaremos el caso donde } \mathbf{d = 2} \text{ e } \mathbf{Y} \text{ es una } \textbf{superficie}.}$

Ejemplo: superficie paramétrica en $\mathbb{T}^3$

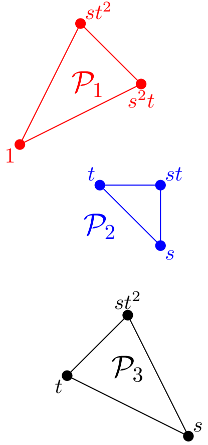
`Entrada`: Tres polinomios de Laurent en dos variables:

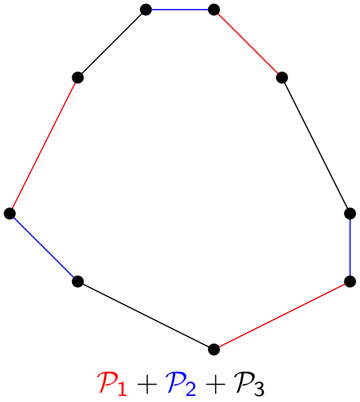
$$\begin{cases} x = f_1(s,t) = 1 + s^3\,t + s\,t^2, \\ y = f_2(s,t) = 2s\,t + 3s + 5t, \\ z = f_3(s,t) = -t + s^2 + s\,t^2. \end{cases}$$

`Salida`: El politopo de Newton de la ecuación implícita $g(x,y,z)$.

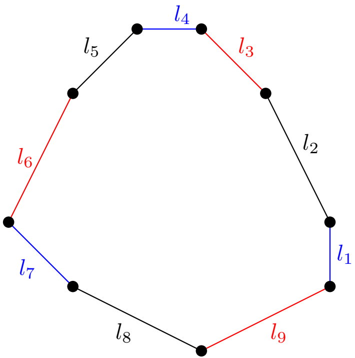
El *polítopo de Newton* de g es la cápsula convexa en $\mathbb{R}^3$ de todos los puntos enteros (i,j,k) tales que $x^i\,y^j\,z^k$ aparece con coeficiente *no nulo* en $g(x,y,z)$.

PASO 1: Dibujar los tres polítopos de Newton y su suma de Minkowski.

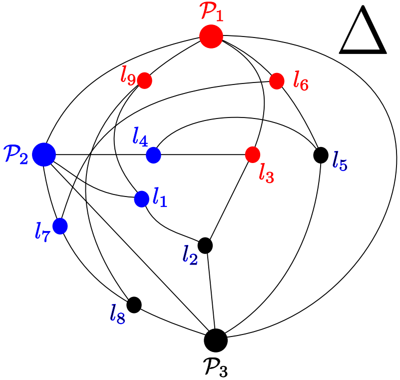




PASO 2: Usando estos polítopos, construir un grafo abstracto Δ.

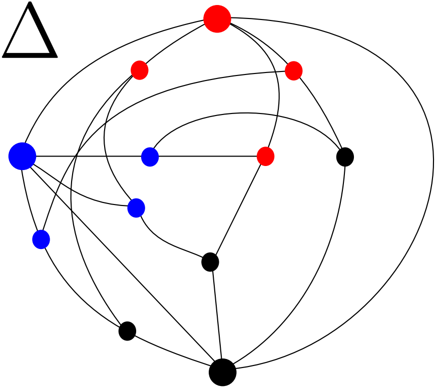


$\rightsquigarrow$

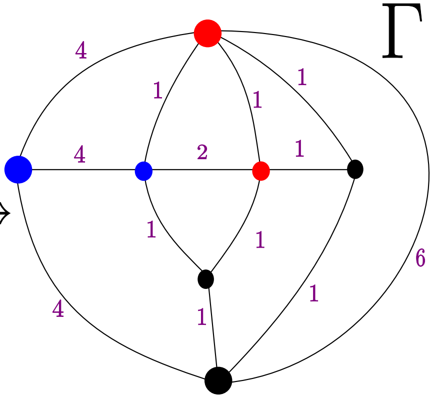


- Agregar un nodo grueso coloreado por cada polítopo $\mathcal{P}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ y dibujar el **triángulo** que une estos tres nodos.
- Agregar un nodo fino coloreado por cada eje en el polítopo $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3$ y dibujar el grafo de adjacencias del polítopo (en este caso, un **9-gono**).
- Unir todos los nodos finos a los nodos gruesos del mismo color.
- En el ejemplo: 3 nodos gruesos, 9 nodos finos y 21 ejes.

PASO 3: Realizar el grafo abstracto como un grafo con pesos Γ en $\mathbb{S}^2$.

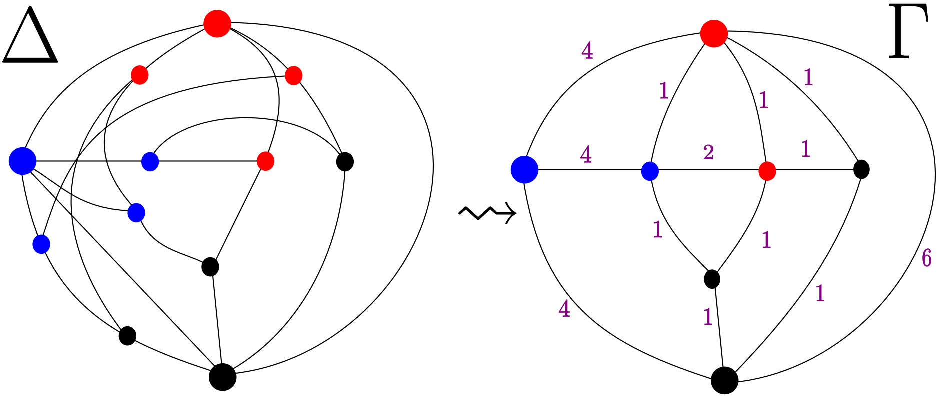


$\rightsquigarrow$



f-vector$(\Gamma) = (7, 13, 8)$.

PASO 3: Realizar el grafo abstracto como un grafo con pesos Γ en $\mathbb{S}^2$.



f-vector$(\Gamma) = (7, 13, 8)$.

- Γ is a es un grafo *planar* con pesos, balanceado en $\mathbb{R}^3$. Es la variedad tropical $\mathcal{T}(g(x, y, z))$, dual al polítopo de Newton de g.
- Podemos recuperar $g(x, y, z)$ a partir de Γ usando *álgebra lineal numérica*.

¿Qué es geometría tropical?

Dada una variedad $X \subset \mathbb{T}^n$ con ideal de definición $I \subset \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, la tropicalización de X es:

$$\mathcal{T}X = \mathcal{T}I := \{w \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{in}_w(I) \text{ no contiene ningún monomio}\}.$$

¿Qué es geometría tropical?

Dada una variedad $X \subset \mathbb{T}^n$ con ideal de definición $I \subset \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, la tropicalización de X es:

$$\mathcal{T}X = \mathcal{T}I := \{w \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{in}_w(I) \text{ no contiene ningún monomio}\}.$$

1. Es un abanico racional poliedral en $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathcal{T}X \cap \mathbb{S}^{n-1}$ es un complejo poliedral esférico.
2. Si I es primo, entonces $\mathcal{T}X$ es puro y de la misma dimensión que X.
3. Conos maximales tienen multiplicities canónicas adosadas a ellos. Con estas multiplicidades, $\mathcal{T}X$ satisface la condición de balanceo.

Ejemplo (hipersuperficies):

- $\mathcal{T}(g)$ es la unión de todos los conos de codim. 1 en el abanico normal (interior) del polítopo de Newton $\mathrm{NP}(g)$.
- Los conos maximales de $\mathcal{T}(g)$ son duales a ejes de $\mathrm{NP}(g)$, y m_σ es la longitud entera del eje asociado.
- Las multiplicidades son esenciales para recuperar $\mathrm{NP}(g)$ a partir de $\mathcal{T}(g)$.

¿Qué es la tropicalización geométrica?

OBJETIVO: Dada $Z \subset \mathbb{T}^N$ **superficie**, calcular $\mathcal{T}Z$ *geométricamente*.
IDEA CLAVE: $\mathcal{T}Z$ puede caracterizarse vía valoraciones divisoriales.

¿Qué es la tropicalización geométrica?

OBJETIVO: Dada $Z \subset \mathbb{T}^N$ **superficie**, calcular $\mathcal{T}Z$ *geométricamente*.
IDEA CLAVE: $\mathcal{T}Z$ puede caracterizarse vía valoraciones divisoriales.

Teorema (Tropicalización geométrica [Hacking - Keel - Tevelev])

Sean $\mathbb{T}^N$ con base de caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_N$, y $Z \subset \mathbb{T}^N$ una **superficie** *suave. Supongamos que $\overline{Z} \supset Z$ es cualquier compactificación suave, cuya frontera divisorial tiene m componentes irreducibles $D_1, \ldots, D_m$ y sin intersecciones triples (***C.N.C.***). Sea Δ el grafo:*

$$V(\Delta) = \{1, \ldots, m\} \quad ; \quad (i,j) \in E(\Delta) \iff D_i \cap D_j \neq \emptyset.$$

Realizamos Δ *vía $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$, donde $[D_k]{:=}(val_{D_k}(\chi_1), \ldots, val_{D_k}(\chi_N)) \in \mathbb{Z}^N$.*
Entonces, $\mathcal{T}Z$ es el **cono sobre el grafo** Γ.

¿Qué es la tropicalización geométrica?

OBJETIVO: Dada $Z \subset \mathbb{T}^N$ **superficie**, calcular $\mathcal{T}Z$ *geométricamente*.
IDEA CLAVE: $\mathcal{T}Z$ puede caracterizarse vía valoraciones divisoriales.

Teorema (Tropicalización geométrica [Hacking - Keel - Tevelev])

Sean $\mathbb{T}^N$ con base de caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_N$, y $Z \subset \mathbb{T}^N$ una **superficie** *suave. Supongamos que $\overline{Z} \supset Z$ es cualquier compactificación suave, cuya frontera divisorial tiene m componentes irreducibles $D_1, \ldots, D_m$ y sin intersecciones triples (***C.N.C.***). Sea Δ el grafo:*

$$V(\Delta) = \{1, \ldots, m\} \quad ; \quad (i,j) \in E(\Delta) \iff D_i \cap D_j \neq \emptyset.$$

Realizamos Δ *vía* $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$, *donde* $[D_k]{:=}(val_{D_k}(\chi_1), \ldots, val_{D_k}(\chi_N)) \in \mathbb{Z}^N$.
Entonces, $\mathcal{T}Z$ *es el* **cono sobre el grafo** Γ.

Teorema (Fórmula combinatoria para multiplicidades [C.])

$$m_{([D_i],[D_j])} = (D_i \cdot D_j)\,\left[\,(\mathbb{Z}\langle [D_i],[D_j]\rangle)^{sat} : \mathbb{Z}\langle [D_i],[D_j]\rangle\,\right]$$

PREGUNTA: ¿Cómo calcular $\mathcal{T}Y$ a partir de la parametrización

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \colon \mathbb{T}^2 \dashrightarrow Y \subset \mathbb{T}^n \quad ?$$

PREGUNTA: ¿Cómo calcular $\mathcal{T}Y$ a partir de la parametrización

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \colon \mathbb{T}^2 \dashrightarrow Y \subset \mathbb{T}^n \quad ?$$

RESPUESTA: Compactificar el dominio $X = \mathbb{T}^2 \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{n}(f_i = 0)$ y usar la función $\mathbf{f}$ para traducir de nuevo a Y.

Proposición

Dado $\mathbf{f} \colon X \subset \mathbb{T}^2 \to Y \subset \mathbb{T}^n$ genéricamente finito de degree δ, sea $\overline{X}$ una compactificación suave con CNC, con complejo de intersección Δ. Asignar cada nodo D_k de Δ en $\mathbb{Z}^n$ a un nodo $\widetilde{D_k}$ de $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, donde

$$[\widetilde{D_k}] = val_{D_k}(\chi \circ f) = f^{\#}([D_k]).$$

Entonces, $\mathcal{T}Y$ es el cono sobre el grafo $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, con multiplicidades

$$m_{([\widetilde{D_i}],[\widetilde{D_j}])} = \frac{1}{\delta}\,(D_i \cdot D_j)\,\big[\,(\mathbb{Z}\langle[\widetilde{D_i}],[\widetilde{D_j}]\rangle)^{sat} : \mathbb{Z}\langle[\widetilde{D_i}],[\widetilde{D_j}]\rangle\,\big].$$

Implicitación tropical de superficies *genéricas*

CONTEXTO: Sea $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon \mathbb{T}^2 \dashrightarrow Y \subset \mathbb{T}^n$ de $\mathrm{gr}(f) = \delta$, donde

- cada $f_i \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ es irred. y tiene **polítopo de Newton prefijado**,
- asumimos **coeficientes genéricos**.

OBJETIVO: Construir el grafo Γ de $\mathcal{T}Y$ usando los polítopos $\{\mathcal{P}_i\}_{i=1}^n$.

Implicitación tropical de superficies *genéricas*

CONTEXTO: Sea $f = (f_1, \dots, f_n)\colon \mathbb{T}^2 \dashrightarrow Y \subset \mathbb{T}^n$ de $\operatorname{gr}(f) = \delta$, donde

- cada $f_i \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ es irred. y tiene **polítopo de Newton prefijado**,
- asumimos **coeficientes genéricos**.

OBJETIVO: Construir el grafo Γ de $\mathcal{T}Y$ usando los polítopos $\{\mathcal{P}_i\}_{i=1}^n$.

IDEA: Compactificar X en la variedad tórica proyectiva $\mathbb{P}(\mathscr{N})$, donde $\mathscr{N}$ es el abanico normal de $\sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i$. *Genéricamente*, $\overline{X}$ es suave y con CNC.

Implicitación tropical de superficies *genéricas*

CONTEXTO: Sea $f = (f_1, \dots, f_n)\colon \mathbb{T}^2 \dashrightarrow Y \subset \mathbb{T}^n$ de $\operatorname{gr}(f) = \delta$, donde

- cada $f_i \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ es irred. y tiene **polítopo de Newton prefijado**,
- asumimos **coeficientes genéricos**.

OBJETIVO: Construir el grafo Γ de $\mathcal{T}Y$ usando los polítopos $\{\mathcal{P}_i\}_{i=1}^n$.

IDEA: Compactificar X en la variedad tórica proyectiva $\mathbb{P}(\mathscr{N})$, donde $\mathscr{N}$ es el abanico normal de $\sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i$. *Genéricamente*, $\overline{X}$ es suave y con CNC.

Los nodos y ejes del complexo de intersección de frontera Δ son

$$V(\Delta) = \{E_i : \dim \mathcal{P}_i \neq 0, 1 \leq i \leq n\} \bigcup \{D_\rho : \rho \in \mathscr{N}^{[1]}\},$$

- $(D_\rho, D_{\rho'}) \in E(\Delta)$ sii ρ, ρ' son rayos *consecutivos* en $\mathscr{N}$.
- $(E_i, D_\rho) \in E(\Delta)$ sii $\rho \in \mathscr{N}(\mathcal{P}_i)$.
- $(E_i, E_j) \in E(\Delta)$ sii $(f_i = f_j = 0)$ tiene una solución en $\mathbb{T}^2$.

Entonces, Γ es la realización de Δ via

$$[E_i] := e_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad , \quad [D_\rho] := \Big(\min_{\alpha \in \mathcal{P}_i} \{\alpha \cdot \eta_\rho\}\Big)_{i=1}^n \;\; \forall \rho \in \mathscr{N}^{[1]},$$

donde η_ρ es el vector entero primitivo que genera ρ.

Implicitación tropical de superficies *genéricas*

Teorema (Sturmfels-Tevelev-Yu, C.)

La variedad tropical $\mathcal{T}Y$ *es el cono sobre el grafo* Γ, *con multiplicidades*

- $m_{([D_\rho],[D_{\rho'}])} = \frac{1}{\delta}\frac{mcd\{2\text{-menores of } ([D_\rho]|[D_{\rho'}])\}}{|\det(\eta_\rho|\eta_{\rho'})|}$, *si* ρ, ρ' *son rayos consecutivos de* $\mathcal{N}$.
- $m_{(e_i,[D_\rho])} = \frac{1}{\delta}\left(|cara_\rho \mathcal{P}_i \cap \mathbb{Z}^2| - 1\right) mcd\{[D_\rho]_j : j \neq i\}$, *si* $\rho \in \mathcal{N}_i$[1].
- $m_{(e_i,e_j)} = \frac{1}{\delta} long\big((f_i = f_j = 0) \cap \mathbb{T}^2\big)$, *si* $\dim(\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_j) = 2$.

Si los polinomios son suficientemente genéricos,

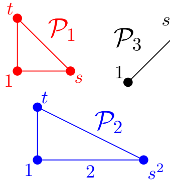
$$long\big((f_i = f_j = 0) \cap \mathbb{T}^2\big) = Vol\ Mixto\ (\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j).$$

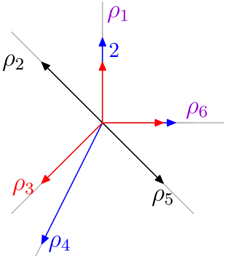
Ejemplo (superficie genérica)

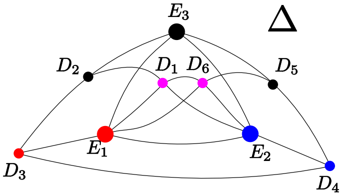
$$Y = \begin{cases} x = f_1(s,t) = a_1 + a_2\, s + a_3\, t, \\ y = f_2(s,t) = b_1 + b_2\, t + b_3\, s^2, \\ z = f_3(s,t) = c_1 + c_2\, st, \end{cases} \qquad a_1, \ldots, c_2 \in \mathbb{C}^* \textit{ genéricos.}$$

Ejemplo (superficie genérica)

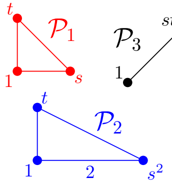
$$Y = \begin{cases} x = f_1(s,t) = a_1 + a_2\, s + a_3\, t, \\ y = f_2(s,t) = b_1 + b_2\, t + b_3\, s^2, \\ z = f_3(s,t) = c_1 + c_2\, st, \end{cases} \qquad a_1, \dots, c_2 \in \mathbb{C}^* \text{ genéricos.}$$

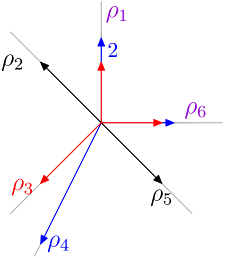


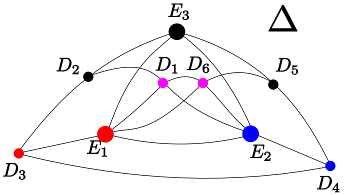


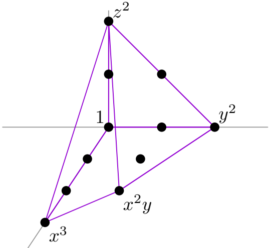


$$Y = \begin{cases} x = f_1(s,t) = a_1 + a_2\, s + a_3\, t, \\ y = f_2(s,t) = b_1 + b_2\, t + b_3\, s^2, \\ z = f_3(s,t) = c_1 + c_2\, st, \end{cases} \qquad a_1, \dots, c_2 \in \mathbb{C}^* \textit{ genéricos.}$$

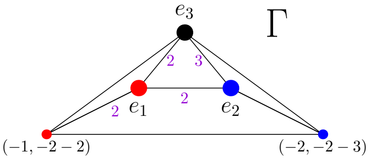








f-vector$=(5,\ 8,\ 5)$



Implicitación tropical de superficies *no genéricas*

No genéricidad $\leftrightarrow$ CNC/suavidad no se satisface, i.e. existen singularidades y/o hay intersecciones triples entre:

$$E_i = (f_i = 0) \text{ solos} \qquad \text{o} \qquad E_i\text{s y } D_\rho\text{s combinados.}$$

Implicitación tropical de superficies *no genéricas*

No genéricidad $\leftrightarrow$ CNC/suavidad no se satisface, i.e. existen singularidades y/o hay intersecciones triples entre:

$$E_i = (f_i = 0) \text{ solos} \qquad \text{o} \qquad E_i\text{s y } D_\rho\text{s combinados.}$$

Solución 1:

1. Sumergir X en $\mathbb{P}(\mathcal{N})$.
2. Resolver intersecciones triples y singularidades via blow-ups clásicos, y arrastrar las valoraciones divisoriales a lo largo de la resolución.

Implicitación tropical de superficies *no genéricas*

No genéricidad $\leftrightarrow$ CNC/suavidad no se satisface, i.e. existen singularidades y/o hay intersecciones triples entre:

$$E_i = (f_i = 0) \text{ solos} \qquad \text{o} \qquad E_i\text{s y } D_\rho\text{s combinados.}$$

Solución 1:

1. Sumergir X en $\mathbb{P}(\mathscr{N})$.
2. Resolver intersecciones triples y singularidades via blow-ups clásicos, y arrastrar las valoraciones divisoriales a lo largo de la resolución.

Solución 2:

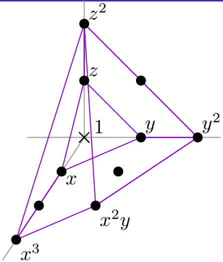
1. Sumergir X en $\mathbb{P}^2_{(s,t,u)} \rightsquigarrow n+1$ divisores de frontera.
$$E_i = (f_i = 0) \quad (1 \leq i \leq n), \quad E_\infty = (u = 0).$$
2. Resolver intersecciones triples y singularidades via blow-ups $\pi\colon \tilde{X} \to X$, y leer las valoraciones divisoriales por *columnas*:

$$(f \circ \pi)^*(\chi_i) = \pi^*(E_i - \deg(f_i)E_\infty) = E_i' - \deg(f_i)E_\infty' - \sum_{j=1}^{r} b_{ij}H_j \quad \forall i.$$

El grafo Δ se obtiene pegando los diagramas de resolución y agregando las intersecciones de a pares.

Ejemplo (superficie no genérica)

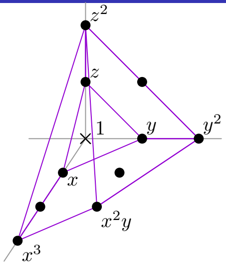
$$Y = \begin{cases} x = f_1(s,t) = s - t, \\ y = f_2(s,t) = t - s^2, \\ z = f_3(s,t) = -1 + s\,t, \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow$$



$(7, 11, 6)$

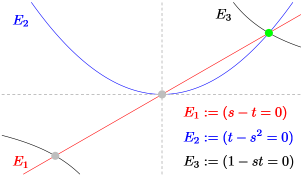
Ejemplo (superficie no genérica)

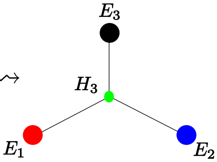
$$Y = \begin{cases} x = f_1(s,t) = s - t, \\ y = f_2(s,t) = t - s^2, \\ z = f_3(s,t) = -1 + s\,t, \end{cases}$$

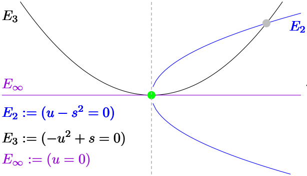


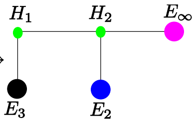
(7, 11, 6)

Cartas afines:



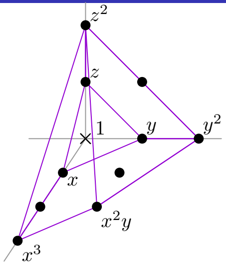






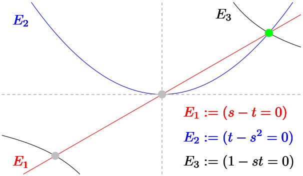
Ejemplo (superficie no genérica)

$$Y = \begin{cases} x = f_1(s,t) = s - t, \\ y = f_2(s,t) = t - s^2, \\ z = f_3(s,t) = -1 + s\,t, \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow$$

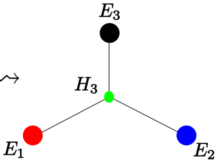


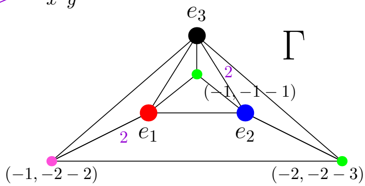
$(7, 11, 6)$

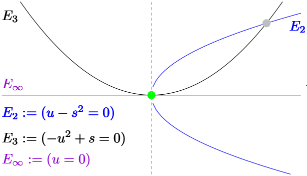
Cartas afines:



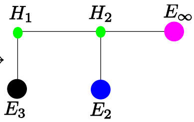
$\rightsquigarrow$



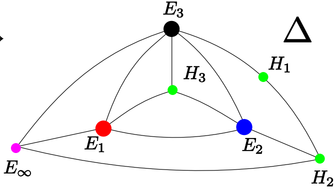




$\rightsquigarrow$



$\leftrightsquigarrow$



Preguntas abiertas

1. ¿Qué pasa si permitimos coeficientes en un cuerpo alg. cerrado valuado no archimedeano cualquiera, e.g. $\mathbb{C}\{\{t\}\}$, $\mathbb{Q}_p, \ldots$? $\rightsquigarrow$ espacios de Berkovich! (para el caso de curvas, ver [Baker-Payne-Rabinoff '11])

Preguntas abiertas

1. ¿Qué pasa si permitimos coeficientes en un cuerpo alg. cerrado valuado no archimedeano cualquiera, e.g. $\mathbb{C}\{\{t\}\}$, $\mathbb{Q}_p, \ldots$? $\rightsquigarrow$ espacios de Berkovich! (para el caso de curvas, ver [Baker-Payne-Rabinoff '11])

2. Superficies especiales se tropicalizan via resolución de singularidades, que es difícil de realizar en la práctica.
   - ¿Existe algún método alternativo? $\rightsquigarrow$ ¿Resoluciones combinatorias?
   - ¿Podemos predecir el grafo Γ a partir de la topología/geometría de las singularidades en el dominio abierto X? $\rightsquigarrow$ diagramas duales/de Enriques, grupos de puntos infinitamente cercanos, ...

Preguntas abiertas

1. ¿Qué pasa si permitimos coeficientes en un cuerpo alg. cerrado valuado no archimedeano cualquiera, e.g. $\mathbb{C}\{\{t\}\}$, $\mathbb{Q}_p, \ldots$? $\rightsquigarrow$ espacios de Berkovich! (para el caso de curvas, ver [Baker-Payne-Rabinoff '11])

2. Superficies especiales se tropicalizan via resolución de singularidades, que es difícil de realizar en la práctica.
   - ¿Existe algún método alternativo? $\rightsquigarrow$ ¿Resoluciones combinatorias?
   - ¿Podemos predecir el grafo Γ a partir de la topología/geometría de las singularidades en el dominio abierto X? $\rightsquigarrow$ diagramas duales/de Enriques, grupos de puntos infinitamente cercanos, ...

3. Si $\dim Z > 2$, tropicalización geométrica requiere que la frontera de una compactificación $\overline{Z}$ tenga *cruces normales* **simples** (i.e. intersección transversa). ¿Podemos reemplazar esta condición con *cruces normales* **combinatorios**?