3.7-4

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} 2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \quad 2x_1 - 3x_2 = 2 \quad 2x_1 = 2 + 6 \quad x_1 = 4$$

$$x_2 = 2$$

$$\boxed{\vec{x} = [4, 2]^T}$$

3.7-8

$$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

let $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$

$$F(\vec{x} + \vec{y}) = F\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \\ (x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 + 2y_1 - x_2 - y_2 \\ x_1 + y_1 + 3x_2 + 3y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_1 - y_2 \\ y_1 + 3y_2 \end{bmatrix}$$

$$= F(\vec{x}) + F(\vec{y})$$

let α any real

$$T(\alpha \vec{X}) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(\alpha x_1) - (\alpha x_2) \\ (\alpha x_1) + 3(\alpha x_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(2x_1) - \alpha x_2 \\ \alpha x_1 + \alpha(3x_2) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \alpha T(\vec{X})$$

$\therefore$ is a linear transformation

3.7-10

$$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

let $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^2$

$$F(\vec{X} + \vec{Y}) = F\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\neq F(\vec{X}) + F(\vec{Y})$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ is not a linear transformation

3.7-20

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

a) $$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}0 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$c_2=-1 \qquad c_1+c_2=1 \qquad c_1=2$

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=T\left(2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=2\,T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)-1\,T\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$=2\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}0 & -1 & 2\\1 & 1 & -1\end{array}\right]$$

$c_2=-2 \qquad c_1+c_2=-1 \qquad c_1=-1+2=1$

$$T\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right)=T\left(1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=1\cdot T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)-2\,T\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\0\end{bmatrix}$$

c) $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}0 & -1 & 3\\1 & 1 & 2\end{array}\right]$

$c_2 = -3 \quad c_1 + c_2 = 2 \quad c_1 = 2-(-3) = 5$

$$T\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) = T\left(5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right) = 5T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) - 3T\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$= 5\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-9\\7\end{bmatrix}$$

3.7-36

$$F\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x_1 - 3x_2 + x_3\\4x_1 + 2x_2 - 5x_3\end{bmatrix}$$

$$G\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-x_1 + 4x_2 + 2x_3\\-2x_1 + 3x_2 + 3x_3\end{bmatrix}$$

a) $$(F+G)\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) + G\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}2x_1 - 3x_2 + x_3\\4x_1 + 2x_2 - 5x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-x_1 + 4x_2 + 2x_3\\-2x_1 + 3x_2 + 3x_3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}x_1 + x_2 + 3x_3\\2x_1 + 5x_2 - 2x_3\end{bmatrix}$$

b)

$$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$G\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$(F+G)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$