

中国人民大学

博士学位论文

(中文题目) 相互作用物种的多波渐近传播

Asymptotic Spreading of Interacting Species

(外文题目) with Multiple Fronts

所在学院: 数学学院

专业名称: 应用数学

研究方向: 生物数学

论文主题词: Hamilton Jacobi; 物种竞争; 传
(3-5个) 播速度; 非合作系统; 速度递归

论文提交日期: 2020年11月09日

摘 要

本文用一种新的方法研究多物种竞争的传播性质. 主要思想是在特定的移动坐标 $y = x - ct$ 下获得传播速度的渐近估计, 这种方法受到了 Freidlin, Evans 和 Souganidis 等人在 Fisher-KPP 的方程中发展的 Hamilton-Jacobi 方法的启发. 本文主要包括以下三个部分:

第一部分, 我们刻画 Lotka-Volterra 双物种竞争扩散系统的解的传播行为. 当初值条件消失在右半端, 我们得到精准的传播速度并证明连续入侵行波解收敛到均匀平衡态. 此结果解决了由 Shigesada 等人在 1997 年提出的公开问题, 并证明较慢的物种以 “nonlocally pulled wave” 向右传播, 其速度随着较快物种速度的增加而减少. 这样, 主要描述较快的物种向右入侵空白栖息地, 接着被共存稳定平衡态入侵的过程.

第二部分, 我们主要集中研究当初值为指数衰减时具有稳定的共存态的 Lotka-Volterra 弱竞争扩散系统解的传播性质. 我们首先建立分段 Lipschitz 连续的 Hamilton-Jacobi 方程的比较原理. 通过 Hamilton-Jacobi 方法, 我们得到传播速度的准确表达式, 它由初值的空间衰减率完全决定. 此结果表明初值的衰减率会降低物种的传播速度. 当衰减率足够大时, 传播性质结果与初值为紧支集的情形相同.

最后, 我们研究三物种竞争系统解的传播性质, 它是非合作系统. 应用 Hamilton-Jacobi 方法, 就两个更快的物种的传播速度而言, 我们建立了最慢物种传播速度的上下界估计. 且在一定条件下, 此估计是最佳的. 传播速度由某一自由边界 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解的速度空间所刻画. 据我们所知, 这是在无界区域三物种竞争系统的第一个理论结果.

关键词: Hamilton-Jacobi, 物种竞争, 传播速度, 紧支集, 指数衰减, 非合作系统, 速度递归

Abstract

This thesis is dedicated to a new approach to study the propagation properties in reaction-diffusion systems involving more than one species. Our main idea consists in obtaining large-deviation type estimates in certain moving coordinates $y = x - ct$, which is inspired by the Hamilton-Jacobi approach for Fisher-KPP equation due to Freidlin, Evans and Souganidis. The content of this thesis separated into three parts.

In the first part, we establish spreading properties of the Lotka-Volterra two-species competition-diffusion system. When the initial data vanish on a right half-line, we derive the exact spreading speeds and prove the convergence to homogeneous equilibrium states between successive invasion fronts. Our main result settles an open question raised by Shigesada et al. in 1997, and shows that the slower species spreads to the right with a nonlocally pulled wave, which is a nonincreasing function of the spreading speed of faster species. By so doing, we describe the invasion of an uninhabited territory by the faster species followed by the invasion by coexistence stable state.

In the second part, our study focus on on the spreading properties of the weak Lotka-Volterra competition-diffusion system with a stable coexistence state when the initial data are exponential decaying. Here, we derive a comparison principle for a piecewise Lipschitz continuous Hamilton-Jacobi equation. By the Hamilton-Jacobi approach for Fisher-KPP equation, we deduce the exact formulas of spreading speeds, which are entirely determined by the spatial decay rates of initial data. Our results indicate that the more rapid decaying rates of the initial data lead to the slower spreading speeds. As the decaying rates are large enough, the spreading properties turn out to coincide with the case of the compactly supported initial data.

Finally, we investigate the spreading properties of a three-species competition-diffusion system, which is non-cooperative. We apply the Hamilton-Jacobi approach, to establish upper and lower estimates of spreading speed for the slowest

species, in terms of the spreading speeds of two faster species. The estimates we obtained are sharp in some situations. The spreading speed is being characterized as the free boundary point of the viscosity solution for certain Hamilton-Jacobi equation cast in the space of speeds. To the best of our knowledge, this is the first theoretical result on three-species competition system in unbounded domains.

Keywords: Hamilton-Jacobi, competition, spreading speed, compacted support, exponential decay, non-cooperative, speed of recursion

目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	v
第一章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.1.1 单个物种的已知结果	2
1.1.2 双物种的已知结果	3
1.1.3 三物种的已知结果	6
1.2 研究的问题和主要结果	7
1.2.1 研究问题	7
1.2.2 主要结果	8
第二章 相互作用物种多波的渐近传播 I: 一种几何光学方法	11
2.1 假设及主要结果	11
2.1.1 主要结果	11
2.1.2 主要结果的数值模拟	15
2.1.3 主要思想大纲	17
2.1.4 本章的结构	18
2.2 预备知识	18
2.3 通过几何光学方法估计 c_2 和 \bar{c}_2	26
2.4 估计 c_2 和 \bar{c}_2	36
2.5 $dr = 1$ 情形	39
2.6 引理 2.2 的证明	41
2.7 命题 2.2 的证明	44

第三章 相互作用物种多波的渐近传播 II: 指数衰减的初值	51
3.1 假设和主要结果	51
3.1.1 假设	51
3.1.2 主要结果	52
3.1.3 主要思想的大纲	54
3.2 最大和最小的速度的估计	55
3.3 c_1 和 c_2 的下界估计	58
3.3.1 c_1 的下界估计	61
3.3.2 c_2 的下界估计	65
3.4 \bar{c}_2 的上界估计和 c_3 的下界估计	67
3.4.1 \bar{c}_2 的上界估计	67
3.4.2 c_3 的下界估计	71
3.4.3 定理 3.1 的证明	75
3.5 Tang 和 Fife 的入侵模式	76
3.6 Girardin 和 Lam 的研究: $0 < a < 1 < b$ 情形	79
3.7 延展结果	82
3.8 Hamilton-Jacobi 方程的比较原理	87
3.8.1 粘性解的定义	88
第四章 三物种竞争系统的堆叠入侵波传播速度	95
4.1 假设和主要结果	95
4.1.1 前两个物种的传播速度	95
4.1.2 第三个物种的传播速度	99
4.1.3 数值模拟	104
4.1.4 本章的结构	106
4.2 预备知识	107
4.3 定理 A 的证明	111
4.3.1 定义和预备知识	113
4.3.2 \bar{c}_3 的上界估计	119

4.3.3 c_3 的下界估计	130
4.4 最终区域的渐近性态	134
4.5 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 的性质	137
4.6 一些有用的引理	141
4.7 引理 4.3 和命题 4.2 的证明	144
4.8 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 的显式表达式	148
第五章 论文总结与研究展望	155
5.1 论文总结	155
5.2 研究展望	156
参考文献	157
发表文章目录	167

第一章 绪论

1.1 研究背景

关注种群中个体数量的变化, 是种群动力学, 生态学的一个重要分支, 也因此是生物学的一个重要研究课题 (考虑到社会经济方面的人口动态, 不是恰当的生物学, 也不是我博士论文的主题). 在种群动力学中存在两大类主要的数学模型 (在生物学中更为普遍): 确定性模型和随机模型. 本文主要关注确定性模型, 在确定性模型中, 存在着大量的反应-扩散系统. 众所周知, 反应-扩散方程对于研究化学、生物、物理等具有十分重要的作用, 本文应用反应-扩散方程研究竞争物种的入侵过程及其渐近传播性质.

1937年, Fisher [42] 关注自然选择和随机空间迁移明显的物种, 可将其模拟为单个带扩散的 Logistic 增长模型, 研究显性基因的扩散现象和传播速度. 同年, Kolmogorov, Petrovskii 和 Piskunov [67] 给出了反应-扩散方程波前解相关结果的严格数学证明. 而后 Aronson 和 Weinberger [5, 6] 建立了具有单调非线性的高维单物种模型的传播速度, 此速度与最小的行波速度相吻合. Weinberger [100] 随后引入了一种基于递归的方法来确定单物种模型的传播速度, 并由 [77] 推广到方程组和 [71, 72] 推广到一般单调动力系统框架. 与之密切相关的是 [61] 关于相同扩散系数的合作系统, 其中也研究了堆叠波的存在性.

对于非单调非线性的单物种模型, Thieme [93] 中表明, 通过构造非线性的单调表达式, 仍可得到物种的传播速度. 这一想法在 [102] 中被用来研究部分的合作系统的传播速度, 这是一种可以被合作系统控制的非合作系统. 也可参见 [97], 其中一般的部分合作系统的结果是在 [71] 获得的. 此外, 通过 Schauder 不动点定理, Girardin [45, 46] 建立了非合作系统的传播速度和行波的若干一般结果, 其性质是在平凡平衡点的线性化是合作的. 对于 Lotka-Volterra 双物种竞争扩散系统, 文献 [17, 47, 69, 73, 89] 等给出了竞争物种的传播速度的若干结果. 也可参见 [30] 关于自由边界的双竞争物种的传播速度的研究.

一般的非合作系统, 如捕食系统, 并不总是由合作系统来控制. 由于缺乏比较原理, 对这类系统的传播性质甚少. 最近 Ducrot 等人 [34] 研究了捕食系统, 其中解耦技术也被用于研究堆叠入侵波. 然而, 此时的行波是局部线性确定的, 这

与本文处理的“nonlocally pulled wave”不同. 相关结果参见 [31, 32]. 参见文献 [49, 56, 76] 研究了部分耦合的三物种竞争系统的最小的线性确定的行波速度.

不论是哺乳动物, 鸟等相对迁移较快的物种, 还是对昆虫和植物相对迁移较慢的物种, 他们都会入侵与传播. 这里介绍一些经典物种的入侵: 1. 哺乳动物的实例, Elton [36] 研究了麝鼠作为北美的土生物种入侵整个欧洲的过程和 Clarke [24] 研究马鹿如何入侵新西兰, Okubo [84] 发现来自美国的灰松鼠作为英国的外侵物种, 完全使英国东部本土红松鼠失去竞争; 2. 鸟类的实例, Okubo [83] 研究了欧洲八哥、麻雀入侵美国的过程; 3. 昆虫的实例, 1911 年日本甲壳虫作为外来物种传播至整个美国西部 [81]; 4. 植物的实例, 来自欧洲和西亚等稻科、花科植物类成功入侵北美 [52]. 还有更多物种的入侵实例也可参见 [28, 51, 89] 和里面的参考文献. 由此可见物种的入侵和传播是生物学的十分重要的研究课题. 近几十年来, 通过数学模型刻画物种的渐近传播有大量数学研究, 具体结果如下.

1.1.1 单个物种的已知结果

首先回顾关于单个 Fisher-KPP 方程的一些经典渐近传播结果:

$$\begin{cases} \partial_t z - \tilde{d}\partial_{xx}z = \tilde{r}z(1-z), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ z(0, x) = z_0(x), & \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 \tilde{d} 和 \tilde{r} 分别是 z 的扩散系数和内禀增长率; $z(t, x)$ 代表物种在时刻 t 和地点 x 时的种群密度. 物种如果在 \mathbb{R} 上具有非空的紧支集, 文献 [5, 42, 67] 证明物种 $z(t, x)$ 有下列传播性质: 存在唯一的 c^* 使得

$$\begin{cases} \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| < ct} |z(t, x) - 1| = 0, & c < c^*, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| > ct} |z(t, x)| = 0, & c > c^*. \end{cases}$$

此渐近性态描述了非稳定态 0 被稳定态 1 的入侵. 因而 c^* 被称为入侵传播速度. 此外, 在这种情况下传播速度 c^* 与 (1.1) 的行波解的最小波速相同, 其中行波解是一种特定的整体解 $z: (t, x) \mapsto \phi(x - ct)$, 其中 $\phi \geq 0$, $\phi(-\infty) = 1$, $\phi(\infty) = 0$. 一个令人惊讶的结果是线性确定性质: 存在一组 (ϕ, c) 当且仅当 ϕ 满足的半线性方程在 $\phi = 0$ 的进行线性化得到线性方程

$$-\tilde{d}\phi'' - c\phi' = \tilde{r}\phi,$$

在 \mathbb{R} 上有正解. 因此, $c^* = 2\sqrt{\tilde{d}\tilde{r}}$.

如果拓宽初值 z_0 的范围使其包含指数衰减类, 那么 (1.1) 的解的渐近行为对 z_0 在 $x = \infty$ 上的指数衰减率是敏感的 (参见 [54, 42 页]), 这是波的前沿. 这与 0 是 (1.1) 的鞍点有关, 参见文献 [16, 35, 65, 79, 87]. 更准确地说, 记 $\lambda^* = \sqrt{\tilde{r}/\tilde{d}}$. 下面结果 [65, 79] 证明:

- (i) 当初值 $z_0(x)$ 在 $x = \infty$ 处衰减快于 $\exp\{-\lambda^*x\}$ 时, 那么传播速度 $c^* = 2\sqrt{\tilde{d}\tilde{r}}$, 与紧支集的情形相同;
- (ii) 当初值 $z_0(x)$ 是在 $x = \infty$ 处表现为 $\exp\{-(\lambda + o(1))x\}$ 的形式, 其中 $\lambda < \lambda^*$, 那么物种的传播速度为 $c(\lambda) = \tilde{d}\lambda + \frac{\tilde{r}}{\lambda}$, 严格大于 $2\sqrt{\tilde{d}\tilde{r}}$, 此时传播速度关于指数衰减率是非递增函数.

对于在异质环境的单个物种的渐近传播的最近进展, 对一维情形可参考文献 [12, 14, 29, 39] 和里面的参考文献, 对更高维情形可参考文献 [13, 15, 82, 88, 101] 和里面的参考文献.

1.1.2 双物种的已知结果

近三十年来, 国内外学者一直试图将这些结果扩展到描述两个或更多相互作用的物种. 对于单调动力系统, Weinberger 等人 [100, 103] (也可参见 [77]) 的开创性工作将物种的传播速度与 (单稳态) 行波解的最小波速联系起来. 研究结果可应用于 Lotka-Volterra 双物种竞争扩散系统. 通过适当地无量纲化, 系统可表示为

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = u(1 - u - av), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t v - d\partial_{xx} v = rv(1 - bu - v), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ v(0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中正常数 a, b 为物种之间的竞争系数; d 和 r 是 v 的扩散系数和内禀增长率; $u(t, x)$ 和 $v(t, x)$ 代表两个竞争物种在时刻 t 和地点 x 时的种群密度. 在不失一般性的情况下, 假设 $dr \geq 1$. Lotka-Volterra 双物种竞争扩散系统有以下分类:

1. 当 $a \leq 1$ 或 $b \leq 1$ 时, 系统是单稳态的: 对应的 ODE 系统存在唯一的局部渐近稳定态. 又可分为以下几个子情形:

- (a) $a = b = 1$: 退化情形通常舍弃;
- (b) $a < 1$ 和 $b < 1$: 共存情形, 也称为弱竞争情形, 稳定平衡态是 $(k_1, k_2) = \left(\frac{1-a}{1-ab}, \frac{1-b}{1-ab}\right)$;
- (c) $a \geq 1$ 和 $b \leq 1$ 且 $a \neq b$: 半灭绝情形, 稳定平衡态是 $(0, 1)$;
- (d) $a \leq 1$ 和 $b \geq 1$ 且 $a \neq b$: 半灭绝情形, 稳定平衡态是 $(1, 0)$;

2. 当 $a \geq 1$ 和 $b \geq 1$ 时, 系统是双稳态的: 即对应的 ODE 系统存在两个局部稳定平衡态 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$, 这种情形也称为互斥情况.

关于双物种竞争扩散系统的两个平衡态, 有大量的数学结果显示是通过一个单一的行波连接, 参见文献 [69, 72, 73] 和其里面的参考文献. 由 Lewis 等人的经典结果可知, (1.2) 的传播速度与连接着 (1.2) 的一对有序平衡态的行波解的最小波速相同.

定理 1.1 ([69, 71]) 假设 (u, v) 是 (1.2) 的解且初值为

$$u(0, x) = \rho_1(x), \quad v(0, x) = 1 - \rho_2(x),$$

其中 $0 \leq \rho_i < 1$ ($i = 1, 2$) 是 \mathbb{R} 上的紧支集函数. 那么存在 $c_{LLW} \in [2\sqrt{1-a}, 2]$ 使得

$$\begin{cases} \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| < ct} (|u(t, x) - k_1| + |v(t, x) - k_2|) = 0, & c < c_{LLW}, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| > ct} (|u(t, x)| + |v(t, x) - 1|) = 0, & c > c_{LLW}. \end{cases}$$

这种情况下, 通常说物种 u 是以速度 c_{LLW} 进行传播的.

注记 1.1 如果初值 $(u, v)(0, x)$ 是 $(1, 0)$ 的紧扰动, 那么存在 $\tilde{c}_{LLW} \in [2\sqrt{dr(1-b)}, 2\sqrt{dr}]$ 使得 v 是以 \tilde{c}_{LLW} 的速度传播.

可知 c_{LLW} (\tilde{c}_{LLW}) 与连接平衡点 (k_1, k_2) 和 $(0, 1)$ ($(1, 0)$) 的行波解的最小波速相同. 关于 c_{LLW} 的取值范围, 在平衡态 $(0, 1)$ 进行线性化, 可得

$$c_{LLW} \geq 2\sqrt{1-a}.$$

Hosono [2] 通过数值模拟表明上面的等式仅在模型参数 d, r, a, b 取特定值才成立. 这就引出了这个等式成立与否以及何时成立的问题, 即线性确定性问题.

最近, Huang 和 Han [60] 通过显式的构造严格证明了 $c_{LLW} > 2\sqrt{1-a}$ 是可能的. 另一方面, 线性确定的充分条件第一次由 [69] 提出, 随后在 [59] 得到改进. 关于线性确定的充分必要的近期发展, 也可参读文献 [2, 3].

受在最后一个冰河时代末期, 两个或者多个树种向北扩展入侵北美大陆的激发 [28], Shigesada 等人 [89, 第 7 章] 提出了两种或两种以上的竞争物种入侵到空的栖息地的问题, 即没有被其中的任何一种生物占据的区域. 在双物种竞争的情况下, 一个有趣的场景出现了, 移动速度较慢的物种侵入 (仍在扩张) 移动速度较快的物种范围. 在 [89, 第 7 章] 里给出了数值计算结果说明这两个物种至少建立了两个入侵波: 第一个波出现在速度较快的物种以 c_1 速度侵入空白栖息地时, 当速度较慢的物种以速度 c_2 “追赶” 上速度较快的物种时则下个波出现. 据推测, 在很长一段时间内, 解表现为堆叠波, 连接着三个均匀平衡状态 $(0, 0)$, E_1 和 E_2 . 这里 E_1 是半平凡平衡态表明更快的物种存活, E_2 是另一个半平凡平衡态或者共存平衡态 (如果共存平衡存在的话). 虽然较快物种的传播速度 c_1 可以用单个方程来确定 (因为较慢的物种本质上不在波的前沿), 但近几十年来第二个速度的确定一直没有定论. 近几年, Lin 和 Li [73] 首先在紧支集的初值 (u_0, v_0) 和弱竞争 $0 < a, b < 1$ 的情形下研究了系统 (1.2) 解的传播性质, 得到了较慢物种传播速度 c_2 的粗略估计. 对于双稳 $a, b > 1$ 情形, Carrère [17] 确定了两个传播速度, 其中 c_2 由连接半平凡稳态 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 的行波解的唯一速度决定. 此外, 还有一些关于柯西问题的相互作用的物种传播到空白的栖息地的相关工作, 如 Ducrot 等人 [34] 和 Lin 等人 [74] 考虑了捕食系统的堆叠波. 对于等扩散系数的合作系统, Iida 等人 [61] 也研究了合作系统堆叠波的存在性. Hsu 和 Zhao [57] 和 Li [70] 考虑积微分竞争模型的传播性质, 在 $c_1 \gg c_2$ 假设下, 可知 $c_2 = c_{LLW} = 2\sqrt{1-a}$. 然而, 在这些研究中, 单个物种的传播速度可以局部确定, 不受其他入侵波的影响. 而 Fang 等人 [40] 考虑时空周期的单调系统得到物种的传播速度与最小波速相同.

然而, 通常第二个速度 c_2 会受到第一个速度 c_1 的影响, 正如 Holzer 和 Scheel [53] 所证明的, 它特别适用于当 $b = 0$ 和 $a > 0$ 情况的 (1.2). 他们证明第二个速度 c_2 可以由时空非齐次系数的单个方程的零解的不稳定性所决定. 对于耦合系统, Girardin 和 Lam [47] 研究了 $0 < a < 1 < b$ 的情况. 通过推导 c_2 的显式公式, 可以发现 c_2 有时严格大于连接 E_1 和 E_2 的行波解的最小速度, 并且它非递增地依赖于第一个速度 c_1 . 在 [47] 中的证明是基于抛物系统的 (分段光滑的) 全局上下解的精细构造. 此前, 结果表明, 在弱竞争 $0 < a, b < 1$ 和初值为紧支集的情况

下 c_2 的公式与 [47] 相同, 虽然对于本文的第一个目标, 可用 [47] 的一般化的方法, 但是构造的细节可能会非常复杂, 因为总共需要考虑三个移动面, 分别连接 $(0, 0)$, $(0, 1)$, (k_1, k_2) 和 $(1, 0)$. 因此, 我们尝试使用一个更直接的方法来更好地解决此问题. 此证明新颖的部分是基于通过在瘦波极限上分析 Hamilton-Jacobi 方程获得传播速度的渐近估计.

1.1.3 三物种的已知结果

考虑三物种竞争扩散系统, 在相应的无量纲化下, 系统表示为

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - d_1 \partial_{xx} u_1 = r_1 u_1 (1 - u_1 - a_{12} u_2 - a_{13} u_3), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t u_2 - d_2 \partial_{xx} u_2 = r_2 u_2 (1 - a_{21} u_1 - u_2 - a_{23} u_3), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t u_3 - d_3 \partial_{xx} u_3 = r_3 u_3 (1 - a_{31} u_1 - a_{32} u_2 - u_3), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u_i(0, x) = u_{i,0}(x), & \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $u_i(t, x)$ 表示为第 i 个竞争物种在时间 t 和地点 x 时的种群密度. 正常数 d_i 和 r_i 表示 u_i 的扩散系数和内禀增长率 (通过伸缩变换变量 t 和 x 的比例可假设 $d_2 = r_2 = 1$), 和正常数 a_{ij} 是 u_j 对 u_i 的竞争系数. 我们确定每个竞争物种以不同传播速度从左到右入侵, 参见图 4.2.

对于三物种竞争扩散系统, 该系统不具有保序性, 比较原理不再适用. 在 $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{13}, a_{23} > 1$ 和 $a_{31} + a_{32} < 1$ 的特殊情况下, (1.3) 可以转化为一个合作系统, Guo 等人 [49] 研究了该情形下的最小行波速度. 其中, 他们应用单调迭代的格式来给出参数的一些条件保证连接 $(1, 1, 0)$ 到 $(0, 0, 1)$ 的最小行波速度是线性确定的. 另外两个这样的三物种模型也有类似的传播结果, 请参见 [56] 和 [76], 以及 [21] 说明单调系统的整体解的存在性, 该单调系统表现为两个行波面从 x -轴两侧相互移动. 当第三个物种对前两个物种只有小的影响时, Chang 等人 [20] 表明三个物种作为非单调的行波解共存, 并证明它是稳定的.

然而, 就我们所知, 除了最近的工作 [23, 34, 106], 对于不适用比较原理的方程组的传播性质所知甚少. 特别是对完全耦合三物种竞争系统 (1.3) 解的传播性质的严格分析, 此前从未有过. 正是这种知识鸿沟激发了对该问题的研究.

1.2 研究的问题和主要结果

1.2.1 研究问题

Lotka-Volterra 竞争扩散方程解的传播性质, 是非常具有理论意义和现实意义背景的研究领域. 对 Lotka-Volterra 双物种竞争扩散系统, 已经有大量的研究解决了一些问题并对生态形成了系统的解释和指导, 然而至今没有利用 Hamilton-Jacobi 方法去研究 Lotka-Volterra 双物种竞争扩散方程解的传播性质. 对于三物种竞争扩散系统, 据我们所知, 仍没有严格的理论结果, 激发了我们对此问题的研究. 本文主要研究该领域的如下三个问题.

问题 A. 对于 Lotka-Volterra 双物种竞争扩散系统, 物种的传播速度是由方程参数以及初值所决定的. Gardien 和 Lam 通过构造全局的上下解得到了紧支集初值情况下单稳定的强竞争物种精确的传播速度. 而对于紧支集初值的弱竞争物种的精确传播速度仍不完全, 因此本文首先研究紧支集初值的弱竞争物种的精确传播速度. 根据下文结果, 我们发现慢物种的传播速度可以被快物种的传播速度所影响. 这是一个有趣的发现, 并具有重要现实意义的研究问题. 该问题的难点在于, 对于弱竞争的扩散模型, 若直接像 Gardien 和 Lam 构造全局上下解, 过于复杂和困难. 创新点受启发于 Freidlin, Evans 和 Souganidis 利用 Fisher-KPP 方程中的几何光学方法去研究竞争扩散系统的传播速度.

问题 B. 我们考虑初值为指数衰减的 Lotka-Volterra 双物种竞争扩散系统, 这是根据问题 A 自然提出的. 已知初值为紧支集的竞争物种的传播速度, 继而对初值如何影响传播速度感兴趣. Gardien 和 Lam 对初值为指数衰减时没有给出精准的物种传播速度. 因此本文第二个问题研究初值为指数衰减时的弱竞争物种的传播速度. 根据下文结果, 可发现慢物种的传播速度由快物种的传播速度和本身的衰减速率同时影响. 创新点利用 Hamilton-Jacobi 方程的比较原理通过构造局部上下解从而研究竞争系统解的传播速度. 这里给出不连续的粘性上下解和分段的 Lipschitz 连续的 Hamilton-Jacobi 方程的比较原理.

问题 C. 我们考虑初值为紧支集或指数衰减的完全耦合的三物种竞争扩散系统, 整个系统缺乏单调性. 现有的关于三物种竞争系统的理论结果都是基于某些特殊情形, 通过变换使之成为合作系统再利用比较原理去得到一些结果. 对于最慢物种 u_3 的传播速度 c_3 , 在无界区域完全耦合三物种竞争系统下仍没有很好的理论结果. 一般的想法是在第二种和第三种物种之间使用子系统从上面估计

c_3 . 然而, 这个子系统并不是最优的, 因为在 (1.3) 的第二个式子令 $u_1 \equiv 1$ 和 (1.3) 的第三个式子令 $u_1 \equiv 0$, 此时子系统是一个双物种竞争扩散模型, 可以直接利用前面两个问题的结果得到第三个物种的传播速度. 而它应该在“正确的”系统中保持 $u_1 \approx \chi_{\{c_2 t < x < c_1 t\}}$. 事实上, 当 $a_{21} > 0$ 时, 子系统的行波解总是高估 c_3 . 同样地, 当 $a_{31} > 0$ 时, 而我们试图估计 c_3 下界时也会偏低. 至今这是一个公开问题, 这里我们将会比较精细地估计 c_3 .

1.2.2 主要结果

本文主要围绕以上三个问题进行研究, 并获得如下三个主要结果. 第一个研究结果针对第一个问题所得. 第二个问题基于文章中新发展的比较原理研究初值为指数衰减时物种的传播速度; 第三个结果基于前两个的结果得到三竞争物种的传播速度的估计及在某些条件下估计是最佳的.

研究结果一: 紧支集初值下的双竞争物种的传播速度 首先我们对初值为紧支集的双物种弱竞争扩散系统 (1.2) 感兴趣, 此问题具有十分重要的生物意义: 一个外来物种和本地物种共同去入侵一片空白栖息地, 他们将会如何入侵, 以及传播的速度. 这里我们主要考虑弱竞争 ($0 < a, b < 1$) 的情形, 对于强竞争 ($0 < a < 1$ 和 $b > 1$) 的情形可用此方法研究推出 [47] 的结果, 这可能提供了一种更简单的方法且更直观地了解出现“nonlocally pulled wave”的原因. 众所周知 dr 的值决定了竞争物种的快慢, 这里我们考虑了 $dr > 0$ 时的不同阈值的情形, 特别地当 $dr = 1$ 时, 即两个竞争物种在缺乏竞争的情况下传播速度相同, 此结果表明此时的竞争物种以共同的传播速度向右传播, 说明连接 (k_1, k_2) 到 $(0, 0)$ 的入侵波在系统 (1.2) 是真实存在的, 可与 Tang 和 Fife [92] 的结果相联系.

主要结果表明, 速度较快的物种 v 的传播速度 c_1 是线性确定速度 $2\sqrt{dr}$, 与较慢物种 u 无关, 而物种 u 的传播速度 c_2 是 c_1 的非递增函数. 这是由于 v 的存在对 u 的入侵产生了抑制作用. 很显然, 即使初值在 $x \gg 1$ 中消失, 传播速度 c_2 可以严格大于 c_{LLW} , 即, 第二个波以严格大于行波解的最小波速向右移动. 共存平衡解向左传播的速度就是连接 (k_1, k_2) 和 $(1, 0)$ 的行波解的最小波速.

研究结果二: 指数衰减初值下的双竞争物种的传播速度 第二个问题研究初值为指数衰减的双物种弱竞争扩散系统 (1.2), 这是针对于第一个问题自然想到对不同的初值, 传播速度是否会有影响, 若影响, 初值如何影响他们的传播速度. 双物种竞争系统实际上仍可看成是一个单调的动力系统, 从而通过构

造单对弱上下解,并在整个区域 $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 应用比较原理得到结果. 通过分析 Hamilton-Jacobi 方程所满足的函数 $w_2(t, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\epsilon \log u\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right)$ 的极限, 我们得到 u 沿着射线 $\{(t, x) : x = c_1 t\}$ 的渐近速度估计, 从而推出物种的传播速度. 结果表明当指数衰减大于特定临界值时, 此时物种的传播速度与初值为紧支集时的物种的传播速度相同, 当指数衰减小于特定临界值时, 物种的传播速度是指数衰减率的非递增函数. 为此, 我们给出不连续的粘性上下解和分段的 Lipschitz 连续的 Hamilton-Jacobi 方程的比较原理. 此时的 Hamiltonian 是分段 Lipschitz 连续的 Hamilton-Jacobi 方程, 其由具体的物种扩散竞争系统演变而来, 具有生物意义. 证明受启发于 Ishii [63] 和 Tourin [94] (也可参见 [4, 22, 44]) 里的证明. Ishii 使用了在 [4] 里的一个至关重要的观察去证明对不连续的上下解且非凸但连续的 Hamilton-Jacobi 方程的比较原理, 而 Tourin 给出了分段 Lipschitz 连续的 Hamilton-Jacobi 方程粘性解的唯一性. 对 Hamiltonian 进行一定假设下, 我们给出了此 Hamilton-Jacobi 比较原理.

主要结果可知较快物种 v 的传播速度 c_1 由在 $x \approx \infty$ 处 v_0 的指数衰减率完全确定, 且完全不受较慢物种 u 的影响, 较慢物种 u 的对应传播速度 c_2 依赖于 c_1 和在 $x \approx \infty$ 处 u_0 的指数衰减率. 此外, 还可利用本文的方法去研究强竞争的情形 [47], 阐明了初值指数衰减率 (λ_u, λ_v^+) 的作用, 提高了 [47, 定理 1.3]. 且在 3.7 节给出延展结果, 为三物种竞争扩散系统打下基础.

研究结果三: 三竞争物种的传播速度 第三个问题研究初值为紧支集和指数衰减的三物种竞争扩散系统 (1.3), 这是首次对于完全耦合的三竞争物种的传播速度具有比较完整的理论结果. 对于三物种竞争扩散系统, 前两个快物种的传播速度可从第三章的延展问题得到. 然而对于最慢物种 u_3 的传播速度, 整个系统缺乏单调性, 比较原理对于整个系统不再适用. 通过直接估计 $w_3(t, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\epsilon \log u_3\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right)$, 证明当 $x/t > \max\{c_{LLW}, s_{nlp}\}$ 有 $w_3(t, x) > 0$, 相当于 $c_3 \leq \max\{c_{LLW}, s_{nlp}\}$, 其中速度 s_{nlp} 是某一 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解的自由边界点. 虽然 c_3 精细估计不能通过单一的比较来实现, 但是我们利用第二个物种 u_2 控制第一个物种 u_1 , 并且使用递归方法来逐步改进估计. 结果表明在 $s_{nlp} > c_{LLW}$ 下, 最慢物种的传播速度的估计是严格的, 即 $c_3 = s_{nlp}$. 4.4 节给出物种在最终区域的渐近性态, 且通过数值模拟可知文章给出的假设是得到此结果的最优条件. 据我们所知, 这是在无界区域三个物种竞争系统的第一个理论结果.

第二章 相互作用物种多波的渐近传播 I: 一种几何光学方法

2.1 假设及主要结果

本文研究弱竞争 $0 < a, b < 1$ 情形. 本章的目的是了解初值 $(u_0, v_0) \in C(\mathbb{R}; [0, 1])^2$ 为紧支集的两个相互竞争的物种的共同入侵:

$$(H_\infty) \begin{cases} \text{存在正常数 } \theta_0, x_0 \text{ 使得} \\ \text{在 } (-\infty, 0] \text{ 上 } \theta_0 \leq u_0(x) \leq 1, \text{ 且在 } [x_0, \infty) \text{ 上有 } u_0(x) = 0. \\ \text{同时, } v_0(x) \text{ 是非平凡的且有紧支集.} \end{cases}$$

换句话说, 假设一开始右半端的栖息地是空的. 在本章中, 我们将演示几何光学的观点如何更直接地确定竞争物种的各种传播速度. 几何光学方法是在推导大空间, 大时间的极限问题的基础上, 从粘性的角度来理解问题的解. 它由 Freidlin [43] 提出的, 他使用概率观点来研究对于单个物种的 Fisher-KPP 方程的解的渐近行为. 随后, Evans 和 Souganidis 使用 PDE 观点对结果进行了推广; 另请参见文献 [11, 14, 78, 80, 91, 107]. Barles, Evans 和 Souganidis [9] 也应用了这种方法研究了 KPP 系统, 其几个物种以共同的传播速度传播.

2.1.1 主要结果

对于情形 $dr > 1$, 主要结果如下所示.

定理 2.1 假设 $dr > 1$. (u, v) 是 (1.2) 的解且初值满足 (H_∞) . 那么存在 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ 使得

$$(a) \quad c_3 \leq -2\sqrt{dr(1-b)} < 0 < 2\sqrt{1-a} \leq c_2 \leq 2 < c_1;$$

(b) 对每一个足够小的 $\eta > 0$, 以下的传播结果成立:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (c_1 + \eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_2 + \eta)t < x < (c_1 - \eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x) - 1|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_3 + \eta)t < x < (c_2 - \eta)t} (|u(t, x) - k_1| + |v(t, x) - k_2|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < (c_3 - \eta)t} (|u(t, x) - 1| + |v(t, x)|) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

更准确的是, 传播速度 c_1, c_2, c_3 可被确定如下:

$$c_1 = 2\sqrt{dr}, \quad c_2 = \max\{c_{LLW}, c_{nlp}\}, \quad c_3 = -\tilde{c}_{LLW}, \quad (2.2)$$

其中如定理 1.1 (注记 1.1) 所示, c_{LLW} (\tilde{c}_{LLW}) 是 (k_1, k_2) 入侵 $(0, 1)$ ((k_1, k_2) 入侵 $(1, 0)$) 的传播速度. 并且

$$c_{nlp} = \begin{cases} \sqrt{dr} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{\sqrt{dr}-\sqrt{a}}, & \sqrt{dr} \leq \sqrt{a} + \sqrt{1-a}, \\ 2\sqrt{1-a}, & \sqrt{dr} > \sqrt{a} + \sqrt{1-a}. \end{cases} \quad (2.3)$$

上面的结果可被简化为

$$(1, 0) \xleftarrow{c_3} (k_1, k_2) \xrightarrow{c_2} (0, 1) \xrightarrow{c_1} (0, 0). \quad (2.4)$$

上述结果还表明, 速度较快的物种 v 的传播速度 c_1 为 $2\sqrt{dr}$ 是线性确定的, 只与 v 的扩散系数和内禀增长率有关, 不受较慢物种 u 的影响, 而物种 u 的传播速度 c_2 是 c_1 的非递增函数. 这是由于 v 的存在对 u 的入侵产生了抑制作用. 很明显, 即使 $u_0(x)$ 在 $x \gg 1$ 中消失, 传播速度 c_2 可以严格大于 c_{LLW} , 即第二个波以严格大于行波解的最小速度的增强的速度移动. 我们可知 c_{nlp} 的表达式与 [47, 定理 1.1] 中的表达式一致, 其可刻画为

$$\{(t, x) : w_1(t, x) = 0\} = \{(t, x) : t > 0 \text{ 和 } x \leq c_{nlp}t\}, \quad (2.5)$$

其中 w_1 是下列时空异质的 Hamilton-Jacobi 方程

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + |\partial_x w|^2 + 1 - a\chi_{\{x \leq 2\sqrt{dr}t\}}, w\} = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w(0, x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ \infty, & x \in (0, \infty), \end{cases} \end{cases} \quad (2.6)$$

的唯一粘性解, 其中 χ_S 是集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ 的指示函数. (下文中与 (2.6) 中类似的初值可以理解为: 对于 $x_0 < 0$, 如果 $(t, x) \rightarrow (0, x_0)$, $w_1(t, x) \rightarrow 0$, 对于 $x_0 > 0$, 如果 $(t, x) \rightarrow (0, x_0)$, $w_1(t, x) \rightarrow \infty$.)

为了解释说明速度 c_{nlp} 是非局部决定的, 通过 (2.5) 定义 c_{nlp} , 其中 w_1 是 (2.6) 的唯一粘性解. 我们将在引理 2.6 证明, $w_1(t, x) = \max\{J_1(t, x), 0\}$, 其中 J_1 :

$$J_1(t, x) = \inf_{\gamma(\cdot)} \int_0^t \left[\frac{|\dot{\gamma}(s)|^2}{4} - 1 + a\chi_{\{\gamma(s) \leq 2\sqrt{dr}s\}} \right] ds,$$

其中下确界是通过取遍所有的轨迹 $\gamma \in H_{\text{loc}}^1([0, \infty))$ 且 $\gamma(0) = 0$ 和 $\gamma(t) = x$. 对于在波上的每一个 (t, x) (即 $x = c_{\text{nlp}}t$), 最小的路径 $\hat{\gamma}(s) = \hat{\gamma}^{t,x}(s)$ 描述了物种如何从 $(0, 0)$ 在时刻 t 到达 $x = c_{\text{nlp}}t$.

当 $a = 0$, 问题 (2.6) 是同质的. 在这个情形里, $w_1(t, x) = \max\{\frac{t}{4}\left(\frac{x^2}{t^2} - 4\right), 0\}$, 因此这个波由 $x = 2t$ 刻画的. 更进一步, 在波上的 (t, x) , 最小路径 $\hat{\gamma}(s)$ 是由直线 $\hat{\gamma}(s) = \frac{x}{t}s = 2s$ 所给定的, 即在时刻 t 到达 $x = 2t$ 上的任意时刻 $s \in [0, t]$, 物种移动都会在波 $x = 2s$ 上. 因此, 对于情形 $a = 0$, 传播速度是局部确定的.

对问题 (2.6), 考虑另一种情形 $a \in (0, 1)$. 那么最小化路径通常不是直线. 事实上, 对于 $1 < \sqrt{dr} < \sqrt{a} + \sqrt{1-a}$, 如果物种在 t 时刻发现自己处于移动波上, 即 $x = c_{\text{nlp}}t$, 则对应的最小话路径是一条分段线性曲线, 连接 $(0, 0)$, $(\tau, 2\sqrt{dr}\tau)$, (t, x) , 其中 $\tau \in (0, t)$ (详见 2.7 节). 因此, 在时刻 t 到达波 $x = c_{\text{nlp}}t$ 的物种在之前的时间中并没有停留在波上. 事实上, 它在前面花费了一定的时间 (以 $2\sqrt{dr} > c_{\text{nlp}}$ 的速度移动). 因此, 速度 c_{nlp} 受到前方的波的影响, 表明它不是局部决定的. 事实上, 它是非局部拉动的 (参见 [86] 给出了 “pulled wave” 和 “pushed wave” 含义).

此外我们还提到了一个密切相关的工作, Holzer 和 Scheel [53], 研究的问题是 (1.2) 的特殊情况, 即 $b = 0$ 时. 他们的证明依赖于在单个移动框架 $y = x - 2\sqrt{dr}t$ 后进行线性化, 其线性化后问题成为暂时的常数. 文献 [12, 39] 也对于这一问题进行了研究, 除了某些临界情形外, 他们得到了行波的完整的存在性、多重性及其吸引力. 对比之下, 对于多个 c_i , 我们的方法可以应用于系数依赖于多个移动坐标 $x - c_it$ 问题. 这使得三竞争物种以不同的速度传播的研究成为可能, 这将出现在本文的第四章.

本文考虑的弱竞争 $0 < a, b < 1$ 情形下, 更有趣是在一定条件下含有 $(0, 0)$ 和 (k_1, k_2) 的 (1.2) 的共同入侵的过程出现, 而平衡态 $(0, 0)$ 和 (k_1, k_2) 是无序的 (关于单调半流理论中稳定态的可比性是至关重要的, 参见 [90]). 此时行波解的存在性, 归因于 Tang 和 Fife [92], 不再由 Weinberger 等 [103] 创建的单调动力系统框架建立 (也可参见 [41, 72]). 本文将会证明 (k_1, k_2) 到 $(0, 0)$ 入侵波在系统 (1.2) 是真实存在的, 与 Tang 和 Fife [92] 的工作相联系. 我们可以得到下面的结果.

定理 2.2 假设 $dr = 1$. (u, v) 是 (1.2) 的解且初值满足 (H_∞) . 那么对于每

一足够小的 $\eta > 0$,

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (2+\eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(-\tilde{c}_{LLW} + \eta)t < x < (2-\eta)t} (|u(t, x) - k_1| + |v(t, x) - k_2|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < (-\tilde{c}_{LLW} - \eta)t} (|u(t, x) - 1| + |v(t, x)|) = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

其中 \tilde{c}_{LLW} 是当 $dr = 1$ 时注记 1.1 里 (1.2) 连接 (k_1, k_2) 和 $(1, 0)$ 的传播速度.

上述结果可简化为

$$(1, 0) \xleftarrow{-\tilde{c}_{LLW}} (k_1, k_2) \xrightarrow{2} (0, 0).$$

定理 2.2 表明从 (k_1, k_2) 到 $(0, 0)$ 的入侵过程是真的存在的, 它与 Tang 和 Fife [92] 的结果相联系, Tang 和 Fife 已证明了 (1.2) 连接 (k_1, k_2) 到 $(0, 0)$ 的行波解的存在性.

通过转换 u 和 v 的角色, 对于情形 $dr < 1$, 不难得到下列结果.

推论 2.1 在情形 $dr < 1$, 平衡点的过渡变为

$$(1, 0) \xleftarrow{c_3} (k_1, k_2) \xrightarrow{c_2} (1, 0) \xrightarrow{c_1} (0, 0).$$

准确的说, 传播速度 c_1, c_2, c_3 能被如下决定:

$$c_1 = 2, c_2 = \max\{\tilde{c}_{LLW}, \tilde{c}_{nlp}\} \text{ 和 } c_3 = -\tilde{c}_{LLW},$$

其中

$$\tilde{c}_{nlp} = \begin{cases} 1 - \sqrt{drb} + \frac{dr(1-b)}{1-\sqrt{drb}}, & 1 \leq \sqrt{dr}(\sqrt{b} + \sqrt{1-b}), \\ 2\sqrt{dr(1-b)}, & 1 > \sqrt{dr}(\sqrt{b} + \sqrt{1-b}). \end{cases} \quad (2.8)$$

注记 2.1 正如 [38], 在较小的修改下本文的方法可以应用于多维度的竞争物种的扩散问题. 然而, 在这里本文选择把重点放在一维的情况, 以保持我们的阐述简单, 并接近 [89, 第 7 章] 里公式猜想.

注记 2.2 在此, 本文还提到一些关于具有 *Stefan* 型移动边界条件的竞赛系统的相关工作, 参见文献 [30, 48, 75, 98, 99, 104]. 在此基础上, 他们证明了移动边界的一些渐近速度估计. 与本文考虑的 *Cauchy* 问题不同, 这种移动边界问题不存在远场效应.

2.1.2 主要结果的数值模拟

对于(a) $dr > 1$, (b) $dr = 1$, (c) $0 < dr < 1$ 这三种情况, (1.2) 的解的渐近行为如图 2.1 所示. 其中, (a) 中 $d = 1.5$ 表示 (1.2) 的数值解与定理 2.1 预期相符. 其中, 物种 v 的传播速度快于物种 u , $c_1 = 2\sqrt{dr} > 2 \geq c_2$. (b) 中 $d = 1$ 对应定理 2.2, 其中 $c_1 = c_2 = 2$. 最后, (c) 中 $d = 0.5$ 表示物种 u 的传播速度快于物种 v , 即, $c_1 = 2 > c_2$, 如推论 2.1 所述. 由于方法的限制, 我们无法得到 (1.2) 的渐近轮廓.

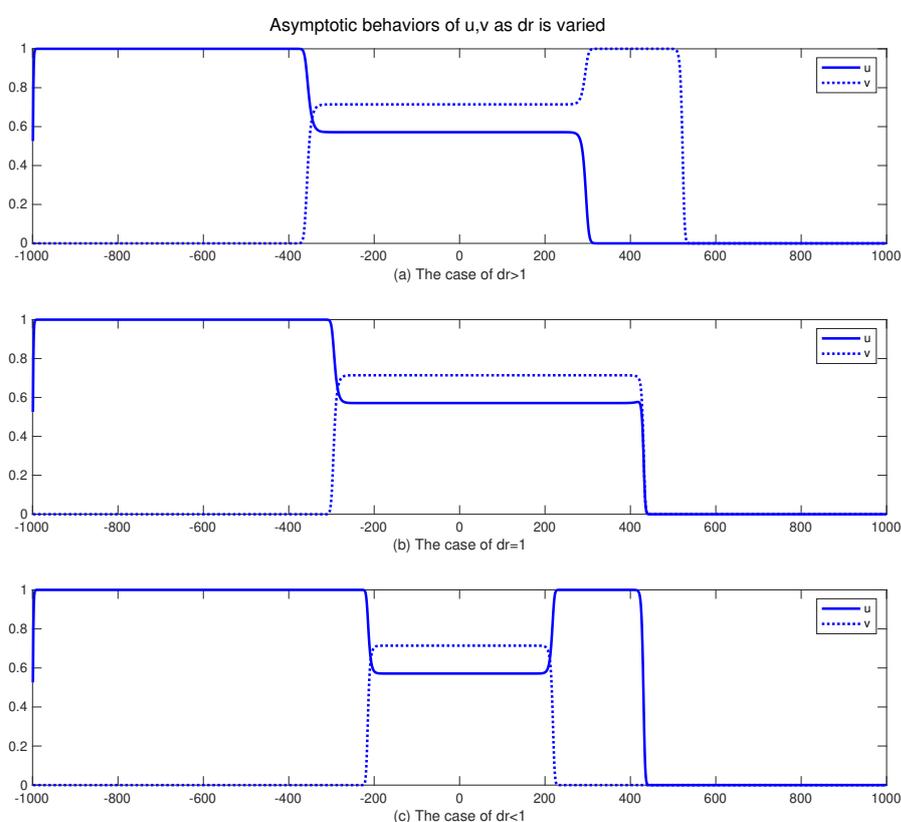


图 2.1 当 $a = 0.6$, $b = 0.5$, $r = 1$ 时 (1.2) 中解的渐近行为, 情形 (a) $d = 1.5$, 情形 (b) $d = 1$, 情形 (c) $d = 0.5$, 其中初值为 $u(0, x) = \chi_{[-1000, 0]}$ 和 $v(0, x) = \chi_{[-20, 0]}$.

接下来, 我们模拟一些数值去验证定理 2.1 给定的 c_1 , c_2 和 c_3 的表达式. 正如在图 2.1(a) 令 $a = 0.6$, $b = 0.5$, $r = 1$ 和 $d = 1.5$, 因此由 [69, 定理 2.1] 可知线

性确定性条件是满足的. 由定理 2.1 里的理论结果推出

$$\begin{cases} c_1 = 2\sqrt{dr} \approx 2.4495, \\ c_2 = \max\{c_{LLW}, c_{nlp}\} \approx \max\{1.265, 1.3387\} \approx 1.3387, \\ c_3 = \tilde{c}_{LLW} = -2\sqrt{dr(1-b)} \approx -1.7321, \end{cases}$$

其中在确定 c_2 时, 利用事实 (i) 由 [69, 定理 2.1] 可知, $c_{LLW} = 2\sqrt{1-a} \approx 1.265$ 是线性确定的; (ii) $\sqrt{dr} \approx 1.2248 < \sqrt{a} + \sqrt{1-a} \approx 1.407$ 使得 $c_{nlp} = \frac{c_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{2\sqrt{a}} \approx 1.3387$.

记

$$x_1(t) = \sup\{x \mid v(t, x) > 0.6\}, \quad x_2(t) = \sup\{x \mid u(t, x) > 0.4\},$$

$$x_3(t) = \inf\{x \mid u(t, x) < 0.7\}.$$

$x_i(t)/t$ ($i = 1, 2, 3$) 的图形展示在图 2.2 中. 实际上, 他们表明 $x_i(t)/t \rightarrow c_i$ 当 $t \rightarrow \infty$. 事实上, 在 $t = 200$, $x_1(t)/t \approx 2.4452$ 与定理 2.1 里的理论值 $c_1 \approx 2.4495$ 相比; $x_2(t)/t \approx 1.3695$ 与 $c_2 \approx 1.3387$ 相比; $x_3(t)/t \approx -1.7214$ 与 $c_3 \approx -1.7321$ 相比. 注意我们在数值 $x_i(t)/t$ 和理论值 c_i 之间得到的差值是在期望的误差 $O(t^{-1} \log t)$ 内. 因此在定理 2.1 得到的 c_1, c_2, c_3 的表达式被图 2.2 所确认.

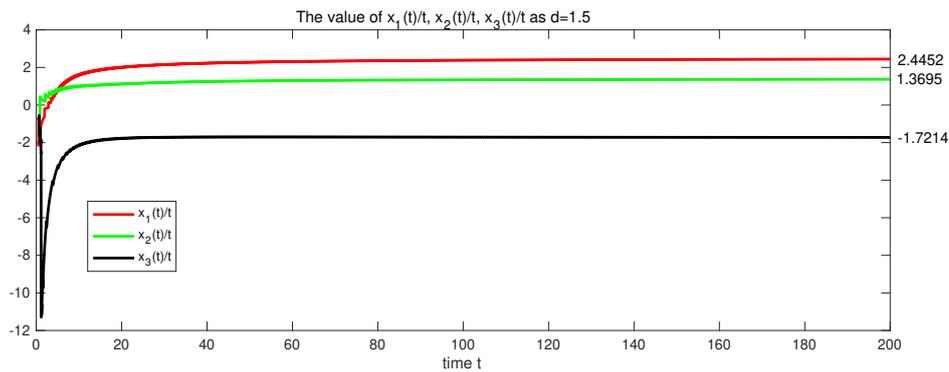


图 2.2 $a = 0.6$, $b = 0.5$, $r = 1$ 和 $d = 1.5$. $u(0, x) = \chi_{[-1000, 0]}$ 和 $v(0, x) = \chi_{[-20, 0]}$. 刻画 $x_i(t)/t$ ($i = 1, 2, 3$) 图形.

2.1.3 主要思想大纲

我们概述定理 2.1 中非局部传播速度 c_2 的主要步骤. (其他传播速度 c_1, c_3 可以通过标准方法所确定, 如 [47], 可见命题 2.1.)

1. c_2 的下界估计, 我们考虑 WKB 变换

$$w^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log u \left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon} \right)$$

且证明半放松极限

$$w_*(t, x) = \liminf_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w^\epsilon(t', x') \quad \text{和} \quad w^*(t, x) = \limsup_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w^\epsilon(t', x')$$

存在, 是由于 w^ϵ 在 $C_{\text{loc}}((0, \infty) \times \mathbb{R})$ 上是一致有界的 (参见引理 2.3). 通过比较原理, 有

$$0 \leq w_* \leq w^* \leq w_1, \quad (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

其中 w_1 是 Hamilton-Jacobi 方程 (2.6) 的粘性解. 通过变分刻画的方法去解 w_1 的显式解, 有

$$\{(t, x) : w_1(t, x) = 0\} = \{(t, x) : t > 0 \text{ 和 } x \leq c_{\text{nlp}}t\}.$$

因此 $w^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log u \left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon} \right) \rightarrow 0$ 在 $\{(t, x) : x < c_{\text{nlp}}t\}$ 局部一致有界的. 那么就可以应用 [38, 第 4 节] 的论证展示

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} u \left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon} \right) > 0, \quad \{(t, x) : t > 0, x < c_{\text{nlp}}t\}.$$

这表明 $c_2 \geq c_{\text{nlp}}$ (参见命题 2.3).

2. c_2 的上界估计, 注意到对某一 $\delta^* > 0$, 在 $\{(t, x) : x \geq (2\sqrt{dr} - \delta^*)t\}$, 有 $w_* \geq w_1$. 因此, 和 (2.9) 一起, 我们得到 u 的渐近估计. 换句话说, 对 $\hat{c} = 2\sqrt{dr} - \delta^*$,

$$u(t, \hat{c}t) \leq \exp(-[\hat{\mu} + o(1)]t), \quad t \gg 1,$$

其中 $\hat{\mu} = w_1(1, \hat{c})$. 可知在 $\{(t, x) : 0 \leq x \leq \hat{c}t\}$ 上 (u, v) 是 (1.2) 的解, 边界条件满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v)(t, 0) = (k_1, k_2), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (u, v)(t, \hat{c}t) = (0, 1),$$

我们可在 $\{(t, x) : 0 \leq x \leq \hat{c}t\}$ 内比较 (u, v) 和连接 (k_1, k_2) 和 $(0, 1)$ 适当的行波解进而得到 u 的传播速度 c_2 的上界估计 (引理 2.2).

2.1.4 本章的结构

2.2 节, 确定了 c_1, c_3 , 并给出了 c_2 的粗略估计. 2.3 节, 推出 u 的近似渐近表达式, 然后 2.4 确定 c_2 . 这就完成了定理 2.1 的证明. 2.5 节, 定理 2.2 是作为定理 2.1 的极限情况推导出来的. 为了直接对思想的阐述, 我们把有些引理和命题的证明延至 2.6 和 2.7 节.

2.2 预备知识

如下定义最大和最小传播速度 (另请参阅 [50, 定义 1.2] 对于单个物种相关的概念):

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{c}_1 = \inf \{c > 0 \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > ct} v(t, x) = 0\}, \\ \underline{c}_1 = \sup \{c > 0 \mid \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{ct-1 < x < ct} v(t, x) > 0\}, \\ \bar{c}_2 = \inf \{c > 0 \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > ct} u(t, x) = 0\}, \\ \underline{c}_2 = \sup \{c > 0 \mid \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{ct-1 < x < ct} u(t, x) > 0\}, \\ \bar{c}_3 = \inf \{c < 0 \mid \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{ct < x < ct+1} v(t, x) > 0\}, \\ \underline{c}_3 = \sup \{c < 0 \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < ct} v(t, x) = 0\}. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

这里 \bar{c}_1 和 \underline{c}_1 (\bar{c}_2 和 \underline{c}_2) 代表了 v (物种 u) 的向右最大和最小的传播速度, 而 $-\underline{c}_3$ 和 $-\bar{c}_3$ 代表 v 的向左最大和最小的传播速度.

在本节中, 我们将确定 $\bar{c}_1 = \underline{c}_1$ 和 $\bar{c}_3 = \underline{c}_3$, 并给出 \underline{c}_2 和 \bar{c}_2 的一些粗略估计. 本节还将证明 (1.2) 的解 (u, v) 将趋近于连续传播速度之间的一个齐次均衡. 由 (2.2) 中 $c_1 = 2\sqrt{dr}$ 和 $c_3 = -\tilde{c}_{LLW}$ 的定义, 本节的主要结果可以精确地表述如下.

命题 2.1 假设 $dr > 1$. (u, v) 是 (1.2) 的解且初值 (u_0, v_0) 满足 (H_∞) . 那么

- (i) $\bar{c}_1 = \underline{c}_1 = c_1$ 和 $\bar{c}_3 = \underline{c}_3 = c_3$;
- (ii) $c_{LLW} \leq \underline{c}_2 \leq \bar{c}_2 \leq 2$;

(iii) 对每一个小的 $\eta > 0$, 下列传播结果成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (c_1 + \eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x)|) = 0, \quad (2.11a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\bar{c}_2 + \eta)t < x < (c_1 - \eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x) - 1|) = 0, \quad (2.11b)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_3 + \eta)t < x < (c_2 - \eta)t} (|u(t, x) - k_1| + |v(t, x) - k_2|) = 0, \quad (2.11c)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < (c_3 - \eta)t} (|u(t, x) - 1| + |v(t, x)|) = 0, \quad (2.11d)$$

其中 c_{LLW} , \tilde{c}_{LLW} 分别由定理 1.1 和注记 1.1 给定.

注记 2.3 在更强的假设 $dr(1 - b) > 1$ 下, 命题 2.1 可由 [73] 证明.

在估计物种的传播速度之前, 首先给一个关于在传播波之间 (u, v) 的渐近行为的引理

引理 2.1 固定 $-\infty \leq \underline{c} < \bar{c} \leq \infty$, 且 (u, v) 在 $\{(t, x) : \underline{c}t \leq x \leq \bar{c}t\}$ 内是 (1.2) 的一个解.

(a) 如果对每一个 $0 < \eta < (\bar{c} - \underline{c})/2$ 有 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} v(t, x) > 0$, 那么

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} u(t, x) \leq k_1, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} v(t, x) \geq k_2;$$

(b) 如果对每一个 $0 < \eta < (\bar{c} - \underline{c})/2$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} u(t, x) = 0$ 且

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} v(t, x) > 0, \text{ 那么}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} |v(t, x) - 1| = 0;$$

(c) 如果对每一 $0 < \eta < (\bar{c} - \underline{c})/2$ 有 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} u(t, x) > 0$, 那么

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} u(t, x) \geq k_1, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} v(t, x) \leq k_2;$$

(d) 如果对每一 $0 < \eta < (\bar{c} - \underline{c})/2$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} v(t, x) = 0$ 且

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} u(t, x) > 0, \text{ 那么}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\underline{c} + \eta)t < x < (\bar{c} - \eta)t} |u(t, x) - 1| = 0.$$

证明. 证明是基于对 (1.2) 整体解的分类. 在 \mathbb{R}^2 中对于 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 定义偏序 “ \preceq ” 如下

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \quad \text{当且仅当} \quad x_1 \leq x_2 \quad \text{且} \quad y_1 \geq y_2.$$

假设 (a) 不成立. 那么存在 (t_n, x_n) 使得当 $n \rightarrow \infty$, $t_n \rightarrow \infty$, 且

$$c_n := \frac{x_n}{t_n} \rightarrow c \in (\underline{c}, \bar{c}) \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n, x_n) > k_1 \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v(t_n, x_n) < k_2.$$

定义 $(u_n, v_n)(t, x) := (u, v)(t_n + t, x_n + x)$. 通过标准证明可知在 $[-t_n, \infty) \times \mathbb{R}$ 上有 $0 \leq u_n \leq 1$ 和 $0 \leq v_n \leq 1$, 因此通过抛物估计对每一个紧子集 $K \subset \mathbb{R}^2$, (u_n, v_n) 在 $C_{\text{loc}}^2(K)$ 是预紧的. 取子序列, 我们可得 (u_n, v_n) 在 $C_{\text{loc}}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ 里收敛到一个 (1.2) 的整体解 (\hat{u}, \hat{v}) . 通过构造, 存在一个常数 $0 < \zeta_0 < 1$ 使得对 $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ 有 $(\hat{u}, \hat{v})(t, x) \preceq (1, \zeta_0)$. 让 (\bar{U}, \underline{V}) 是 ODEs 的 Lotka-Volterra 系统的解

$$U_t = U(1 - U - aV), \quad V_t = rV(1 - bU - V),$$

其初值是 $(1, \zeta_0)$, 因此 $(\bar{U}, \underline{V})(\infty) = (k_1, k_2)$. 现在, 对每一个 $T > 0$, 对所有的 x 有 $(\hat{u}, \hat{v})(-T, x) \preceq (\bar{U}, \underline{V})(0)$, 通过比较原理可得

$$(\hat{u}, \hat{v})(t, x) \preceq (\bar{U}, \underline{V})(t + T), \quad (t, x) \in [-T, 0] \times \mathbb{R}, \quad T > 0,$$

因此

$$(\hat{u}, \hat{v})(0, 0) \preceq (\bar{U}, \underline{V})(T), \quad T > 0.$$

$T \rightarrow \infty$ 时, 我们得到 $(\hat{u}, \hat{v})(0, 0) \preceq (k_1, k_2)$. 特别地, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u, v)(t_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n)(0, 0) = (\hat{u}, \hat{v})(0, 0) \preceq (k_1, k_2).$$

这是一个矛盾因此证明了 (a). 其他的结论遵循类似的论证. \square

下面的引理说的是 u (v) 的最大传播速度可以由 u (v) 沿一条线 $\{(t, x) : x = \hat{c}t\}$ 的渐近行为得到.

引理 2.2 设 $\hat{c} > 0$, $t_0 > 0$, 和 (\tilde{u}, \tilde{v}) 是

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - \partial_{xx} \tilde{u} = \tilde{u}(1 - \tilde{u} - a\tilde{v}), & 0 \leq x \leq \hat{c}t, t > t_0, \\ \partial_t \tilde{v} - d\partial_{xx} \tilde{v} = r\tilde{v}(1 - b\tilde{u} - \tilde{v}), & 0 \leq x \leq \hat{c}t, t > t_0, \\ \tilde{u}(t_0, x) = \tilde{u}_0(x), \tilde{v}(t_0, x) = \tilde{v}_0(x), & 0 \leq x \leq \hat{c}t_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

解.

(a) 如果 $\hat{c} > 2$ 和存在 $\hat{\mu} > 0$ 使得

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{u}, \tilde{v})(t, 0) = (k_1, k_2)$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{u}, \tilde{v})(t, \hat{c}t) = (0, 1)$,
(ii) 对每一 $\mu \in [0, \hat{\mu})$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mu t} \tilde{u}(t, \hat{c}t) = 0$,

那么对每一 $c > c_{\hat{c}, \hat{\mu}}$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{ct < x \leq \hat{c}t} \tilde{u}(t, x) = 0,$$

其中

$$c_{\hat{c}, \hat{\mu}} = \begin{cases} c_{\text{LLW}}, & \hat{\mu} \geq \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}), \\ \hat{c} - \frac{2\hat{\mu}}{\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4(\hat{\mu} + 1 - a)}}, & 0 < \hat{\mu} < \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}); \end{cases}$$

(b) 如果 $\hat{c} > 2\sqrt{dr}$ 和存在 $\hat{\mu} > 0$ 使得

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{u}, \tilde{v})(t, 0) = (k_1, k_2)$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{u}, \tilde{v})(t, \hat{c}t) = (1, 0)$,
(ii) 对每一 $\mu \in [0, \hat{\mu})$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mu t} \tilde{v}(t, \hat{c}t) = 0$,

那么对每一 $c > \tilde{c}_{\hat{c}, \hat{\mu}}$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{ct < x \leq \hat{c}t} \tilde{v}(t, x) = 0,$$

其中

$$\tilde{c}_{\hat{c}, \hat{\mu}} = \begin{cases} \tilde{c}_{\text{LLW}}, & \hat{\mu} \geq \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}(\hat{c} - \tilde{c}_{\text{LLW}}), \\ \hat{c} - \frac{2d\hat{\mu}}{\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4d[\hat{\mu} + r(1-b)]}}, & 0 < \hat{\mu} < \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}(\hat{c} - \tilde{c}_{\text{LLW}}). \end{cases}$$

这里 $c_{\text{LLW}}, \tilde{c}_{\text{LLW}}$ 分别是定理 1.1 和注记 1.1 给定的, 且

$$\lambda_{\text{LLW}} = \frac{c_{\text{LLW}} - \sqrt{c_{\text{LLW}}^2 - 4(1-a)}}{2}, \quad \tilde{\lambda}_{\text{LLW}} = \frac{\tilde{c}_{\text{LLW}} - \sqrt{\tilde{c}_{\text{LLW}}^2 - 4dr(1-b)}}{2d}. \quad (2.13)$$

引理 2.2 的证明是基于与连接 (k_1, k_2) 和其中的一个半平凡解的适当的行波解进行比较. 证明延至 2.6 节.

命题 2.1 的证明. 对于 $i = 1, 2, 3$, 从定义直接可得 $c_i \leq \bar{c}_i$. 我们按以下顺序完成证明: (1) $\bar{c}_2 \leq 2$, (2) $\bar{c}_1 \leq 2\sqrt{dr}$, (3) $\bar{c}_3 \leq -\tilde{c}_{LLW}$, (4) $c_2 \geq c_{LLW}$, (5) $c_1 \geq 2\sqrt{dr}$, (6) $c_3 \geq -\tilde{c}_{LLW}$. 在那以后, 通过引理 2.1 我们推出 (2.11a)-(2.11d). 本命题的证明采用了 [34] 和 [47, 命题 3.1] 的思想.

步骤 1. 证明 (1) 和 (2).

固定 $\lambda > 0$, 选择 $A \gg 1$ 使得 $\bar{u}_\lambda(t, x) := \exp(-\lambda x + (\lambda^2 + 1)t + A)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}_\lambda - \partial_{xx} \bar{u}_\lambda \geq \bar{u}_\lambda(1 - \bar{u}_\lambda), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \bar{u}_\lambda(x, 0) \geq u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

通过比较原理, 有

$$0 \leq u(t, x) \leq \exp(-\lambda x + (\lambda^2 + 1)t + A). \quad (2.14)$$

令 $\lambda = 1$, 对每一个 $\eta > 0$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (2+\eta)t} |u(t, x)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (2+\eta)t} \exp(-x + 2t + A) = 0. \quad (2.15)$$

因此 $\bar{c}_2 \leq 2$, 即 (1) 成立. 相似地, 对每一个 $\eta > 0$, 有,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| > (2\sqrt{dr} + \eta)t} |v(t, x)| = 0, \quad (2.16)$$

即 $\bar{c}_1 \leq 2\sqrt{dr}$ 和 (2) 成立. 此外, 当 $dr > 1$ 时, 我们推出 (2.11a).

步骤 2. 证明 (3), 即 $\bar{c}_3 \leq -\tilde{c}_{LLW}$.

由 (H_∞) 可知, v_0 是非平凡的, 紧支撑的且

$$(u_0(x), v_0(x)) \preceq (1, v_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$(\tilde{u}_{LLW}, \tilde{v}_{LLW})$ 是 (1.2) 的解且初值满足 $(1, v_0(x))$. 那么由注记 1.1 保证 $\tilde{c}_{LLW} \in [2\sqrt{dr}(1-b), 2\sqrt{dr}]$ 的存在性, 使得对 $\forall c \in (-\tilde{c}_{LLW}, 0)$ 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{|x| < |c|t} \tilde{v}_{LLW}(t, x) > 0.$$

对 (1.2) 使用比较原理, 对所有的 $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ 有 $(u, v) \preceq (\tilde{u}_{LLW}, \tilde{v}_{LLW})$, 其满足, 对每一个 $c \in (-\tilde{c}_{LLW}, 0)$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{ct < x < ct+1} v(t, x) \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{ct < x < ct+1} \tilde{v}_{LLW}(t, x) > 0.$$

这证明了 $\bar{c}_3 \leq -\tilde{c}_{\text{LLW}} \leq -2\sqrt{dr(1-b)}$, 因此 (3) 成立.

步骤 3. 证明 (4), 即 $c_2 \geq c_{\text{LLW}}$.

如步骤 2, 通过比较 (u, v) 与 (1.2) 满足初值 $(\tilde{u}_0, 1)$ 的解 $(u_{\text{LLW}}, v_{\text{LLW}})$, 其中紧支撑的 \tilde{u}_0 满足 $0 \leq \tilde{u}_0 \leq u_0$, 然后再利用定理 1.1, 这能证明 (4).

步骤 4. 证明 (5), 即 $c_1 \geq 2\sqrt{dr}$.

固定 $c \in (2, 2\sqrt{dr})$, 和选择足够小的 $\eta_1 > 0$ 使得

$$[c - \eta_1, c + \eta_1] \subset (2, 2\sqrt{dr}), \quad \frac{c^2}{4d} - r(1 - 2\eta_1) + \frac{d\pi^2\eta_1^2}{4} < 0,$$

通过 (2.15), 再选择足够大 $T_1 > 1/\eta_1^2$ 使得

$$au(t, x) \leq \eta_1, \quad (t, x) \in \Omega_1,$$

其中 $\Omega_1 = \{(t, x) : (c - \eta_1)t \leq x \leq (c + \eta_1)t, t \geq T_1\}$. 现在, 让 $\eta_2 \in (0, \eta_1]$, 且定义

$$\underline{v}^c(t, x) := \begin{cases} \eta_2 e^{-\frac{c}{2d}(x-ct+1/\eta_1)} \cos\left(\frac{\eta_1\pi(x-ct)}{2}\right), & |x-ct| < 1/\eta_1, \\ 0, & |x-ct| \geq 1/\eta_1, \end{cases}$$

其中选择足够小的 η_2 确保在抛物边界 Ω_1 上使得 $\underline{v}^c(t, x) \leq v(t, x)$.

可知 $v(t, x)$ 和 $\underline{v}^c(t, x)$ 分别在 Ω_1 上是方程

$$\partial_t \tilde{v} - d\partial_{xx} \tilde{v} = r\tilde{v}(1 - \eta_1 - \tilde{v})$$

的上下解.

通过比较原理, 我们推出

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} v(t, ct) \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \underline{v}^c(t, ct) > 0.$$

因此, $c_1 \geq c$. $c \nearrow 2\sqrt{dr}$ 时, 有 $c_1 \geq 2\sqrt{dr}$.

步骤 5. 证明对于小的 $\eta > 0$, 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{(\bar{c}_3 + \eta)t < x < (c_1 - \eta)t} v(t, x) > 0. \quad (2.17)$$

给定任意小的 $\eta > 0$, 由 \bar{c}_3 和 c_1 的定义表明 $c'_3 \in (\bar{c}_3, \bar{c}_3 + \eta)$, $c'_1 \in (c_1 - \eta, c_1)$ 的存在性和 $T > 0$ 使得

$$\inf_{t \geq T} \min\{v(t, c'_3 t), v(t, c'_1 t)\} > 0.$$

现在, 定义

$$\delta := \min \left\{ \frac{1-b}{2}, \inf_{c'_3 T < x < c'_1 T} v(T, x), \inf_{t \geq T} \min \{v(t, c'_3 t), v(t, c'_1 t)\} \right\} > 0.$$

注意到 $v(t, x)$ 是 KPP 方程 $\partial_t v = d\partial_{xx}v + rv(1-b-v)$ 满足在抛物边界 $\Omega := \{(t, x) : t \geq T, c'_3 t < x < c'_1 t\}$ 上有 $v(t, x) \geq \delta$ 的上解. 因为 $v - \delta$ 不能在内部达到负的最小值, 在 Ω 内有 $v \geq \delta$. 特别地, (2.17) 成立.

步骤 6. 证明对小的 $\eta > 0$, 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{x < (c_2 - \eta)t} u(t, x) > 0. \quad (2.18)$$

固定一个小的 $\eta > 0$. 通过 $c_2 > 0$ 的定义, 存在 $c'_2 \in (c_2 - \eta, c_2)$ 和 $T_2 > 0$ 使得

$$\inf_{t \geq T_2} u(t, c'_2 t) > 0. \quad (2.19)$$

同时注意到 $v \leq 1$, 因此 u 是

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx}u + u(1-a-u), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \chi_{(-\infty, 0]} \theta_0, & \mathbb{R}, \end{cases}$$

的上解, 其中 $\theta_0 > 0$ 是由 (H_∞) 给定的. 由 [42, 67] 的经典结果可知, 对于某 $T_2 > 0$, 对所有 $\eta > 0$, 有

$$\inf_{t \geq T_2} \inf_{x < (2\sqrt{1-a}-\eta)t} u(t, x) \geq \frac{1-a}{2} > 0. \quad (2.20)$$

因为 $\{(T_2, x) : (2\sqrt{1-a}-\eta)T_2 \leq x \leq c'_2 T_2\}$ 是一个紧集, (2.20) 表明

$$\inf_{x \leq c'_2 T_2} u(T_2, x) > 0. \quad (2.21)$$

通过 (2.19) 和 (2.21), 我们推出 $\delta := \min\{\inf_{t \geq T_2} u(t, c'_2 t), \frac{1-a}{2}, \inf_{x \leq c'_2 T_2} u(T_2, x)\}$ 是正的, 因此在域 $\Omega' := \{(t, x) : t \geq T_2, x \leq c'_2 t\}$ 内 u 是 KPP 方程 $\partial_t u = \partial_{xx}u + u(1-a-u)$ 在抛物边界上满足 $u(t, x) \geq \delta$ 的上解. 因此, 我们推出在 Ω' 上有 $u(t, x) \geq \delta$ 且 (2.18) 成立.

步骤 7. 证明 (2.11b) 和 (2.11c).

固定小的 $\eta > 0$. 因为 (2.17) 成立, 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (\bar{c}_2 + \eta)t} u = 0$ (通过 \bar{c}_2 的定义), 应用引理 2.1(b) 我们推出 (2.11b).

接下来, 由 (2.17), (2.18) 和 $\bar{c}_3 \leq -\tilde{c}_{\text{LLW}}$ 的事实, 利用引理 2.1(a) 和 (c) 我们推出 (2.11c).

还需证明 $c_3 \geq -\tilde{c}_{\text{LLW}}$.

步骤 8. 证明对每一个 $\eta > 0$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < (-2\sqrt{dr} - \eta)t} |u(t, x) - 1| = 0. \quad (2.22)$$

从 (2.16) 和 (2.20) 注意到对每一个 $\eta > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < (-2\sqrt{dr} - \eta)t} |v(t, x)| = 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{x < (-2\sqrt{dr} - \eta)t} u(t, x) \geq \frac{1-a}{2}.$$

因此通过运用引理 2.1(d) 我们可得 (2.22).

步骤 9. 证明对每一个 $\lambda > 0$, 存在 $K > 0$ 使得

$$v(t, x) \leq \min \{1, \exp(\lambda(x + K) + (d\lambda^2 + r)t)\}. \quad (2.23)$$

为此, 选取 $K > 0$ 使得 $v_0(x) \leq \chi_{[-K, \infty)}$, 那么 (2.23) 的右端是 KPP 方程 $\partial_t v = d\partial_{xx}v + rv(1-v)$ 的弱上解.

步骤 10. 最后证明 $c_3 \geq -\tilde{c}_{\text{LLW}}$ 和 (2.11d).

我们首先应用引理 2.2 证明 $c_3 \geq -\tilde{c}_{\text{LLW}}$. 让 $\tilde{u}(t, x) = u(t, -x)$ 和 $\tilde{v}(t, x) = v(t, -x)$ 且 $\hat{c} > 2\sqrt{dr}$ 是一个后面再确定的常数. 由步骤 7 证明的 (2.11c) 和 (2.22), 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{u}, \tilde{v})(t, 0) = (k_1, k_2), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{u}, \tilde{v})(t, \hat{c}t) = (1, 0).$$

这验证了引理 2.2(b) 中的条件 (i) 和 (ii). 然后, 通过 (2.23), 对于任意的 $\lambda > 0$, 有

$$\tilde{v}(t, \hat{c}t) = v(t, -\hat{c}t) \leq \exp\{-\mu^\lambda t + \lambda K\} = \exp\{-(\mu^\lambda + o(1))t\},$$

其中 $\mu^\lambda = \hat{c}\lambda - d\lambda^2 - r$. 为了应用引理 2.2(b), 选择 λ 和 \hat{c} 使得

$$\mu^\lambda \geq \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}(\hat{c} - \tilde{c}_{\text{LLW}}) = -d\tilde{\lambda}_{\text{LLW}}^2 + \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}\hat{c} - r(1-b), \quad (2.24)$$

其中等式成立是因为 (2.13) 中 $\tilde{\lambda}_{\text{LLW}}$ 的定义. 注意到

$$\mu^\lambda - \left[-d\tilde{\lambda}_{\text{LLW}}^2 + \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}\hat{c} - r(1-b)\right] = (\lambda - \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}) \left[\hat{c} - d(\lambda + \tilde{\lambda}_{\text{LLW}})\right] - rb,$$

可固定 $\lambda > \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}$ 和选择足够大的 \hat{c} 使得 (2.24) 成立. 对 (\tilde{u}, \tilde{v}) 应用引理 2.2(b), 对任意的 $c > \tilde{c}_{\hat{c}, \mu} = \tilde{c}_{\text{LLW}}$, 我们推出

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > ct} \tilde{v}(t, x) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < -ct} v(t, x) = 0.$$

这表明 $c_3 \geq -\tilde{c}_{\text{LLW}}$.

更进一步, 由 (2.17) 的表达式, 通过引理 2.1(d), 我们推出 (2.11d). 至此完成命题 2.1 的证明. \square

注记 2.4 由命题 2.1 证明的步骤 2 和 3, 观察对更一般的初值, 即

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u_0(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} v_0(x) = 0,$$

(3) $\bar{c}_3 \leq -\tilde{c}_{\text{LLW}}$ 和 (4) $c_2 \geq c_{\text{LLW}}$ 仍然成立.

2.3 通过几何光学方法估计 c_2 和 \bar{c}_2

这节假设存在 $c_1 > \tilde{c}_1 \geq 2$ 使得对所有 $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ 有

$$\chi_{\{\tilde{c}_1 t < x < c_1 t\}} \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} v^\epsilon(t', x') \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} v^\epsilon(t', x') \leq \chi_{\{x < c_1 t\}}. \quad (2.25)$$

$$(t', x') \rightarrow (t, x) \qquad (t', x') \rightarrow (t, x)$$

注记 2.5 在 $dr > 1$ 和 (H_∞) 假设下, $\tilde{c}_1 = 2$ 和 $c_1 = 2\sqrt{dr}$, 由命题 2.1 可知条件 (2.25) 成立.

为了证明定理 2.1, 仍需证明 $c_2 = \bar{c}_2$ 和确定其值. 鉴于引理 2.2, 关键是选择 $\hat{c} > 2$ 和确定 $\hat{\mu} > 0$ 使得

$$u(t, \hat{c}t) = \exp(-(\hat{\mu} + o(1))t). \quad (2.26)$$

对于情形 $a < 1 < b$, 在 [47] 里通过全局上下解的构造完成了这个定理的证明, 在这个意义上他们在 $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上被定义且满足微分不等式.

在这节, 通过极限偏差估计我们推出 (2.26) 的指数估计. 通过此方法, 不必构造系统 (1.2) 的全局上下解我们就可获得 u 的指数估计.

为此, 通过下列的变换我们引入一个小的参数 ϵ :

$$u^\epsilon(t, x) = u\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right), \quad v^\epsilon(t, x) = v\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right).$$

在新的尺度下, 我们重写 (1.2) 中的 u 的方程

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon = \epsilon \partial_{xx} u^\epsilon + \frac{u^\epsilon}{\epsilon} (1 - u^\epsilon - av^\epsilon), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u^\epsilon(0, x) = u_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right), & \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.27)$$

为了得到当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时 u^ϵ 的渐近行为, 想法是考虑 WKB 变换 w^ϵ , 其中 w^ϵ 是由

$$w^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log u^\epsilon(t, x), \quad (2.28)$$

给定的和满足方程:

$$\begin{cases} \partial_t w^\epsilon - \epsilon \partial_{xx} w^\epsilon + |\partial_x w^\epsilon|^2 + 1 - u^\epsilon - av^\epsilon = 0, & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w^\epsilon(0, x) = -\epsilon \log u^\epsilon(0, x), & \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.29)$$

引理 2.3 假设 w^ϵ 是 (2.29) 的解. 那么对每一在 $[(0, \infty) \times \mathbb{R}] \cup \{0\} \times (-\infty, 0]$ 里的紧子集 Q , 存在不依赖于 ϵ 的常数 $C(Q)$ 使得

$$0 \leq w^\epsilon(t, x) \leq C(Q), \quad (t, x) \in Q, \quad \epsilon \in (0, 1/C(Q)).$$

证明. 因为 $u^\epsilon \leq 1$, 通过定义有 $w^\epsilon \geq 0$. 仍需证明上界估计. 按照 [38, 引理 2.1] 的思想去构造合适的上解且应用比较原理得到预期的结果. 首先, 固定 $\delta \in (0, 1)$ 使得

$$Q \subset ([0, 1/\delta] \times (-\infty, -\delta]) \cup ([\delta, 1/\delta] \times [-\delta, 1/\delta]).$$

我们将会分别在 $[0, 1/\delta] \times (-\infty, -\delta]$ 和 $[\delta, 1/\delta] \times [-\delta, 1/\delta]$ 估计 w^ϵ .

定义 $Q_0 := (0, \infty) \times (-\infty, 0)$ 和对于 $\epsilon \in (0, 1/2]$,

$$\bar{z}_1^\epsilon(t, x) := \frac{2\epsilon}{|x|} + 2t - \epsilon \log \theta_0, \quad (t, x) \in Q_0,$$

其中 θ_0 是在 (H_∞) 中指定的. 对于 $\epsilon \in (0, 1/2]$, 证明

$$w^\epsilon(t, x) \leq \bar{z}_1^\epsilon(t, x), \quad (t, x) \in Q_0. \quad (2.30)$$

为此, 首先观察到在 $Q_0 = (0, \infty) \times (-\infty, 0)$ 上 \bar{z}_1^ϵ 是 (2.29) 的 (经典的) 上解. 事实上, 对于 $\epsilon \in (0, 1/2]$, 在 ∂Q_0 上 $w^\epsilon \leq \bar{z}_1^\epsilon$, 和

$$\begin{aligned} & \partial_t \bar{z}_1^\epsilon - \epsilon \partial_{xx} \bar{z}_1^\epsilon + |\partial_x \bar{z}_1^\epsilon|^2 + 1 - u^\epsilon - av^\epsilon \\ &= 2 + \frac{4\epsilon^2}{|x|^3} \left(\frac{1}{|x|} - 1 \right) + 1 - u^\epsilon - av^\epsilon \\ &\geq 1 + \frac{4\epsilon^2}{|x|^3} \left(\frac{1}{|x|} - 1 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

通过极大值原理可知 (2.30) 成立. 这证明了对于 $\epsilon \in (0, 1/2]$,

$$w^\epsilon(t, x) \leq C_\delta, \quad (t, x) \in [0, 1/\delta] \times (-\infty, -\delta], \quad (2.31)$$

通过取 $C_\delta = \sup_{0 < \epsilon \leq 1/2} \sup_{[0, 1/\delta] \times (-\infty, -\delta]} \bar{z}_1^\epsilon(t, x)$.

仍需证明对 $\epsilon \in (0, 2\delta]$, 在 $[\delta, 1/\delta] \times [-\delta, 1/\delta]$ 上 w^ϵ 的一致有界性. 为此, 定义

$$\bar{z}_2^\epsilon(t, x) = \frac{|x + 2\delta|^2}{4t} + t + \frac{\epsilon}{2} \log t + C_\delta,$$

其中 $C_\delta > 0$ 是由 (2.31) 给定的. 那么 \bar{z}_2^ϵ 在 $(0, \infty) \times (-\delta, \infty)$ 上是 (2.29) 的 (经典的) 上解.

此外, 对每一 $\tau > 0$, 对所有的 $x \in \mathbb{R}$, $w^\epsilon(\tau, x)$ 是有界的. 因为

$$\begin{cases} w^\epsilon(\tau, x) < \infty = \bar{z}_2^\epsilon(0, x), & x \geq -\delta, \\ w^\epsilon(t + \tau, -\delta) \leq C_\delta \leq \bar{z}_2^\epsilon(t, -\delta), & t \in [0, 1/\delta - \tau], \end{cases}$$

通过比较我们得到

$$w^\epsilon(t + \tau, x) \leq \bar{z}_2^\epsilon(t, x), \quad (t, x) \in [0, 1/\delta - \tau] \times [-\delta, \infty).$$

$\tau \rightarrow 0$ 时, 我们证明了

$$\sup_{[\delta, 1/\delta] \times [-\delta, 1/\delta]} w^\epsilon(t, x) \leq \sup_{[\delta, 1/\delta] \times [-\delta, 1/\delta]} \bar{z}_2^\epsilon(t, x) < \infty.$$

这完成了 w^ϵ 的局部有界的证明. □

我们已经建立了 C_{loc} 的界, 参考 Barles 和 Perthame [10], 通过使用半放松极限方法, 我们将对 w^ϵ 取 (上和) 极限. 以下列的定义开始:

$$w^*(t, x) = \limsup_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w^\epsilon(t', x'), \quad w_*(t, x) = \liminf_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w^\epsilon(t', x'). \quad (2.32)$$

注记 2.6 通过 (2.30), 对任意的 $\delta \in (0, 1)$ 和小的 ϵ 它有,

$$\sup_{[0, 1/\delta] \times (-\infty, -\delta]} w^\epsilon(t, x) \leq \sup_{[0, 1/\delta] \times (-\infty, -\delta]} \left[\frac{2\epsilon}{|x|} + 2t - \epsilon \log \theta_0 \right].$$

首先令 $\epsilon \rightarrow 0$ 再令 $\delta \rightarrow 0$, 我们推出对所有的 $x \leq 0$ 有 $w_*(0, x) = w^*(0, x) = 0$.

引理 2.4 假设对某 $c_1 > \tilde{c}_1 \geq 2$ 使得 (2.25) 成立. 那么

(i) w^* 是上半连续的且是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + H_1(t, x, \partial_x w), w\} = 0, & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w(0, x) = \begin{cases} 0, & (-\infty, 0], \\ \infty, & (0, \infty), \end{cases} \end{cases} \quad (2.33)$$

的粘性下解;

(ii) w_* 是下半连续的且是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + H_2(t, x, \partial_x w), w\} = 0, & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w(0, x) = \begin{cases} 0, & (-\infty, 0], \\ \infty, & (0, \infty), \end{cases} \end{cases} \quad (2.34)$$

的粘性上解, 其中

$$H_1(t, x, p) = |p|^2 + 1 - a\chi_{\{x \leq c_1 t\}}, \quad H_2(t, x, p) = |p|^2 + 1 - a\chi_{\{\tilde{c}_1 t < x < c_1 t\}}. \quad (2.35)$$

证明. 通过构造, w^*, w_* 分别是上半连续和下半连续的. 由 (2.25) 和 (2.29), 可用类似 [38, 引理 2.2] 的论证去证明 w^*, w_* 分别在 $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 是 Hamilton-Jacobi 方程的粘性上下解. 仍需验证初值. 通过注记 2.6, 对于 $x \leq 0$ 有 $w_*(0, x) = w^*(0, x) = 0$, 仍需验证对于 $x > 0$ 有 $w_*(0, x) = \infty$. 为此, 对每一个 $\lambda > 0$, 利用 (2.14) 我们推出

$$w_\epsilon(t', x') \geq \lambda x' - (\lambda^2 + 1)t' + \epsilon A, \quad (t', x') \in (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 和 $(t', x') \rightarrow (0, x)$ 时取下极限, 对 $x > 0$ 有 (仍然对每一个 $\lambda > 0$) $w_*(0, x) \geq \lambda x$. 再让 $\lambda \rightarrow \infty$, 我们推出对所有的 $x > 0$ 有 $w_*(0, x) = \infty$. \square

为了研究 w^ϵ 的极限 w^* 和 w^ϵ , 如下引入辅助函数 w_i ($i = 1, 2$). 对 $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, 设 $\mathbb{X} = H_{\text{loc}}^1([0, \infty))$ 和

$$\mathbb{X}^{t,x} = \{\gamma \in \mathbb{X} : \gamma(0) = x, \gamma(t) \leq 0\}.$$

对所有的 $\gamma, \hat{\gamma} \in \mathbb{X}$ 和所有的 $s \geq 0$, 映射 $\vartheta : \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty]$ 是一个停时如果:

$$\begin{cases} \text{如果 } \gamma(\tau) = \hat{\gamma}(\tau) \text{ 对 } \tau \in [0, s] \text{ 和 } \vartheta[\gamma(\cdot)] \leq s, \\ \text{那么 } \vartheta[\gamma(\cdot)] = \vartheta[\hat{\gamma}(\cdot)]. \end{cases} \quad (2.36)$$

让 S 是 \mathbb{R} 里的开集且 $\gamma \in \mathbb{X}^{t,x}$. 停时的例子是从 S 第一次离开的时刻 τ , τ 由 $\tau = \inf \{s \in [0, \infty) : \gamma(s) \notin S\}$ 给定.

Θ 表示所有停时的集合. 那么对于 $i = 1, 2$, $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, 定义

$$w_i(t, x) = \sup_{\vartheta \in \Theta} \left[\inf_{\gamma(\cdot) \in \mathbb{X}^{t,x}} \int_0^{t \wedge \vartheta[\gamma(\cdot)]} L_i(t-s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right] \quad (2.37)$$

和

$$J_i(t, x) = \inf_{\gamma(\cdot) \in \mathbb{X}^{t,x}} \int_0^t L_i(t-s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds, \quad (2.38)$$

其中对于 $i = 1, 2$, $L_i(t, x, q)$ 是 $H_i(t, x, p)$ 的 Legendre 变换, 即 $L_i(t, x, q) = \max_{p \in \mathbb{R}} [q \cdot p - H_i(t, x, p)]$. 分别地,

$$L_1(t, x, q) = \frac{|q|^2}{4} - 1 + a\chi_{\{x \leq c_1 t\}}, \quad L_2(t, x, q) = \frac{|q|^2}{4} - 1 + a\chi_{\{\bar{c}_1 t < x < c_1 t\}}. \quad (2.39)$$

下面是 J_1 的表达式, 它的证明延至 2.7 节.

命题 2.2 假设 $c_1 > \bar{c}_1 \geq 2$. 那么

(a) J_1 能如下表示.

$$J_1(t, x) = \begin{cases} \frac{t}{4} \left(\frac{x^2}{t^2} - 4 \right), & \frac{x}{t} \geq c_1 \\ \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a} \right) [x - \bar{c}_{\text{nlp}} t], & c_1 - 2\sqrt{a} \leq \frac{x}{t} < c_1, \\ \frac{t}{4} \left(\frac{x^2}{t^2} - 4(1-a) \right), & 0 \leq \frac{x}{t} < c_1 - 2\sqrt{a}, \\ -t(1-a), & \frac{x}{t} < 0, \end{cases} \quad (2.40)$$

其中 $\bar{c}_{\text{nlp}} = \frac{c_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}}$;

(b) J_1 满足 Freidlin 的条件 [43]:

$$\begin{cases} J_1(t, x) = \inf_{\gamma(\cdot) \in \mathbb{X}^{t,x}} \left\{ \int_0^t L_1(t-s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \mid (t-s, \gamma(s)) \in P \text{ 对于 } 0 \leq s < t \right\} \\ \text{对每一个 } (t, x) \in \partial P, \text{ 其中 } P := \{(t, x) : J_1(t, x) > 0\}; \end{cases} \quad (2.41)$$

(c) 存在 δ^* 在 $\{(t, x) : x \geq (c_1 - \delta^*)t\}$ 里使得 $J_1(t, x) = J_2(t, x)$.

引理 2.5 假设对某些 $c_1 > \tilde{c}_1 \geq 2$ 使 (2.25) 成立. 那么

$$w_*(t, x) \geq w_2(t, x) \geq J_2(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R},$$

其中 w_* , w_2 和 J_2 分别由 (2.32), (2.37) 和 (2.38) 给定.

证明. 首先, 由应用 [38, 引理 3.1] 的论证, 证明

$$w_*(t, x) \geq w_2(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (2.42)$$

让 $\eta > 0$ 和固定一个函数 $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足

$$\begin{cases} \text{在 } (-\infty, 0] \text{ 上 } \zeta \equiv 0, \text{ 在 } (0, \infty) \text{ 上 } \zeta > 0, \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases} \quad (2.43)$$

现在考虑辅助函数:

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + H_2(t, x, \partial_x w), w\} = 0, & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w(0, x) = \eta\zeta, & \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.44)$$

因为 (2.44) 的初值是有界的, 从 [38, 定理 D.1] 可知 (2.44) 有唯一的, Lipschitz 连续解 $w_{2,\eta}$, 其中 $w_{2,\eta}$ 由

$$w_{2,\eta}(t, x) = \sup_{\vartheta \in \Theta} \inf_{\gamma(\cdot) \in \mathbb{X}} \left\{ \int_0^{t \wedge \vartheta[\gamma(\cdot)]} L_2(t-s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + \chi_{\{\vartheta[\gamma(\cdot)] \geq t\}} \eta \zeta(\gamma(t)) \mid \gamma(0) = x \right\}, \quad (2.45)$$

给定.

因为 (i) $w_{2,\eta}(0, x)$ 是一致有界的, (ii) 对所有 $x \in \mathbb{R}$, $w_*(0, x) \geq w_{2,\eta}(0, x)$ 且 (iii) w_* 是 (2.34) 的粘性上解, 通过比较原理对每一个 $\eta > 0$ 有

$$w_*(t, x) \geq w_{2,\eta}(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

(即使对所有的 $x > 0$ 有 $w_*(0, x) = \infty$, 观察到 $w_* - w_{2,\eta}$ 不会有内部的负的极小值. 这里对所有 x 有 $w_{2,\eta}(0, x) < \infty$ 的事实是关键, 详情可参见 [38, 定理 B.1]). 接下来, 当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, 我们推出 $w_{2,\eta} \rightarrow w_2$, 因此 (2.42) 成立.

事实上, 由 (2.37) 和 (2.45), 容易知道 $w_{2,\eta}$ 关于 η 是非增的, 且对于所有的 $\eta > 0$ 有 $w_{2,\eta} \leq w_2$, 因此当点态 $\eta \rightarrow \infty$ 对某些满足 $0 \leq w_{2,\infty} \leq w_2$ 的函数 $w_{2,\infty}$ 有 $w_{2,\eta} \rightarrow w_{2,\infty}$. 仍需证明 $w_{2,\infty} = w_2$. 如果不是的话, 那么存在某一点 $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, $\delta > 0$ 和 $\eta_0 > 0$ 使得对所有的 $\eta \geq \eta_0$ 有

$$w_{2,\eta}(t, x) + 3\delta < w_2(t, x). \quad (2.46)$$

根据 (2.37) 定义, 选择某 $\vartheta_\infty \in \Theta$ 使得

$$w_2(t, x) \leq \inf_{\gamma(\cdot) \in \mathbb{X}^{t,x}} \int_0^{t \wedge \vartheta_\infty[\gamma(\cdot)]} L_2(t-s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + \delta. \quad (2.47)$$

由 (2.45), 对任意的 $\eta \geq \eta_0$ 更进一步选取 $\gamma_\eta \in \mathbb{X}$ 满足 $\gamma_\eta(0) = x$ 使得

$$w_{2,\eta}(t, x) \geq \int_0^{t \wedge \vartheta_\infty[\gamma_\eta(\cdot)]} L_2(t-s, \gamma_\eta(s), \dot{\gamma}_\eta(s)) ds + \chi_{\{\vartheta_\infty[\gamma_\eta(\cdot)] \geq t\}} \eta \zeta(\gamma_\eta(t)) - \delta. \quad (2.48)$$

那么可以用下面两步得到矛盾. 首先, 称对所有的 $\eta \in [\eta_0, \infty)$ 有 $\vartheta_\infty[\gamma_\eta] \geq t$. 假如不是, 那么存在某一 $\eta \in [\eta_0, \infty)$ 使得 $\vartheta_\infty[\gamma_\eta] < t$. 那么可以找到某一 $\tilde{\gamma}_\eta \in \mathbb{X}$ 使得

$$\tilde{\gamma}_\eta = \gamma_\eta \quad \text{在 } [0, \vartheta_\infty[\gamma_\eta]], \quad \text{和} \quad \tilde{\gamma}_\eta(t) = 0,$$

因此 $\tilde{\gamma}_\eta \in \mathbb{X}^{t,x}$. 因为 $\vartheta_\infty[\gamma_\eta] < t$, 通过停时定义, 我们推出 $\vartheta_\infty[\tilde{\gamma}_\eta] = \vartheta_\infty[\gamma_\eta] < t$. 应用 (2.47) 和 (2.48), 得到矛盾:

$$\begin{aligned} w_{2,\eta}(t, x) + 2\delta &\geq \int_0^{\vartheta_\infty[\tilde{\gamma}_\eta(\cdot)]} L_2(t-s, \tilde{\gamma}_\eta(s), \dot{\tilde{\gamma}}_\eta(s)) ds + \delta \\ &\geq \inf_{\gamma(\cdot) \in \mathbb{X}^{t,x}} \int_0^{t \wedge \vartheta_\infty[\gamma(\cdot)]} L_2(t-s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + \delta \geq w_2(t, x). \end{aligned}$$

因此, 对所有 $\eta \in [\eta_0, \infty)$ 有 $\vartheta_\infty[\gamma_\eta] \geq t$, 且 (2.48) 变成

$$w_{2,\eta}(t, x) \geq \int_0^t L_2(t-s, \gamma_\eta(s), \dot{\gamma}_\eta(s)) ds + \eta \zeta(\gamma_\eta(t)) - \delta, \quad (2.49)$$

其表明在 $H^1([0, t])$ 中 $\{\gamma_\eta\}$ 的有界性. 事实上, 由 (2.46) 和 (2.49),

$$\int_0^t \frac{|\dot{\gamma}_\eta|^2}{4} ds - 2t \leq \int_0^t L_2(t-s, \gamma_\eta, \dot{\gamma}_\eta) ds \leq w_{2,\eta}(t, x) + \delta \leq w_2(t, x) - 2\delta$$

是与 $\eta \geq \eta_0$ 无关. 由

$$\begin{aligned} \int_0^t |\gamma_\eta|^2 ds &\leq 2 \int_0^t |\gamma_\eta(s) - \gamma_\eta(0)|^2 ds + 2 \int_0^t |\gamma_\eta(0)|^2 ds \\ &\leq 2 \int_0^t \left[s \int_0^s |\dot{\gamma}_\eta(\hat{s})|^2 d\hat{s} \right] ds + 2x^2 t \\ &\leq 2Ct^2 + 2x^2 t, \end{aligned}$$

那么得到 $\int_0^t |\gamma_\eta|^2 ds$ 的有界性, 其中用到了与 η 无关的 C 使得 $\gamma_\eta(0) = x$ 和 $\int_0^t |\dot{\gamma}_\eta|^2 ds \leq C$. 因此, 在 $H^1([0, t])$ 上 $\{\gamma_\eta\}$ 是一致有界的, 因此可以取子序列 $\eta_n \rightarrow \infty$ 使得对满足 $\gamma_\infty(0) = x$ 的 $\gamma_\infty \in \mathbb{X}$ 在 $H^1([0, t])$ 上有 $\gamma_{\eta_n} \rightharpoonup \gamma_\infty$. 由 (2.49), 因此我们推出 $\zeta(\gamma_\infty(t)) = 0$, 通过 (2.43) 所以有 $\gamma_\infty \in \mathbb{X}^{t,x}$. 应用 (2.47) 和 (2.49), 有 (使用 $t \wedge \vartheta_\infty[\gamma_\eta] = t$)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} w_{2, \eta_n}(t, x) + 2\delta \geq \inf_{\gamma(\cdot) \in \mathbb{X}^{t,x}} \int_0^t L_2(t-s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + \delta \geq w_2(t, x),$$

其与 (2.46) 矛盾. 因此, $w_{2, \infty} = w_2$ 和 (2.42) 已经证明.

最后, 由 (2.37) 和 (2.38) 的定义, 通过对 (2.37) 取停时 $\vartheta \equiv \infty$ 得到 $w_2 \geq J_2$. \square

引理 2.6 假设对某些 $c_1 > \bar{c}_1 \geq 2$ 使得 (2.25) 成立. 那么

$$w^*(t, x) \leq w_1(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (2.50)$$

其中 w^* 和 w_1 分别由 (2.32) 和 (2.37) 给定. 此外, $w_1(t, x) = \max\{J_1(t, x), 0\}$, 其中 J_1 是定义在 (2.38), 所以

(a) 如果 $\frac{c_1}{2} \in (1, \sqrt{a} + \sqrt{1-a}]$, 那么 $c_1 > \bar{c}_{\text{nlp}}$ 和

$$w_1(t, x) = \begin{cases} \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}\right)(x - \bar{c}_{\text{nlp}}t), & \bar{c}_{\text{nlp}} < \frac{x}{t} \leq c_1, \\ 0, & \frac{x}{t} \leq \bar{c}_{\text{nlp}}; \end{cases}$$

(b) 如果 $\frac{c_1}{2} \in (\sqrt{a} + \sqrt{1-a}, \infty)$, 那么

$$w_1(t, x) = \begin{cases} \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}\right)(x - \bar{c}_{\text{nlp}}t), & c_1 - 2\sqrt{a} < \frac{x}{t} \leq c_1, \\ \frac{t}{4} \left(\frac{x^2}{t^2} - 4(1-a)\right), & 2\sqrt{1-a} < \frac{x}{t} \leq c_1 - 2\sqrt{a}, \\ 0, & \frac{x}{t} \leq 2\sqrt{1-a}, \end{cases}$$

其中 $\bar{c}_{\text{nlp}} = \frac{c_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}}$.

证明. 首先, 类似于 [38, 引理 3.1] 的思路证明

$$w^*(t, x) \leq w_1(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (2.51)$$

对每一个 $\sigma \geq 0$, 定义 $G_\sigma = (-\infty, -\sigma)$ 且记

$$\Lambda_\rho \equiv \sup_{x \in G_\sigma} w^*(\rho, x), \quad \rho > 0.$$

由注记 2.6, 对每一个 $\rho > 0$ 有 $\Lambda_\rho < \infty$ 和对 $x \in G_0$ 有 $w^*(0, x) = 0$. 因为 w^* 是上半连续的, 对每一个 $\sigma \geq 0$, 有

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Lambda_\rho = 0. \quad (2.52)$$

选择某一小的 $\rho > 0$ 和由

$$w_1^{\sigma, \rho}(t, x) = \sup_{\vartheta \in \Theta} \inf_{\gamma(\cdot) \in \mathbb{X}} \left\{ \int_0^{(t-\rho) \wedge \vartheta[\gamma(\cdot)]} L_1(t-s-\rho, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right. \\ \left. + \Lambda_\rho \chi_{\{\vartheta[\gamma(\cdot)] \geq (t-\rho)\}} \left| \gamma(0) = x \text{ and } \gamma(t-\rho) \in G_\sigma \right. \right\}, \quad (2.53)$$

定义函数 $w_1^{\sigma, \rho} : (\rho, \infty) \times \mathbb{R}$. 那么, 由 [38, 定理 D.1], $w_1^{\sigma, \rho}$ 是

$$\min\{\partial_t w + H_1(t, x, \partial_x w), w\} = 0, \quad (\rho, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (2.54)$$

的粘性解且有

$$w_1^{\sigma, \rho}(\rho, x) = g^{\sigma, \rho}(x) := \begin{cases} \Lambda_\rho, & x \in G_\sigma, \\ \infty, & x \in \mathbb{R} \setminus G_\sigma. \end{cases}$$

注意对所有的 $x \in \mathbb{R}$ 有 $w^*(\rho, x) \leq w_1^{\sigma, \rho}(\rho, x)$ 且 $w^*(\rho, x) < \infty$, 和 $w_1^{\sigma, \rho}$, w^* 分别是

$$\min\{\partial_t w + H_1(t, x, \partial_x w), w\} = 0, \quad (\rho, \infty) \times \mathbb{R},$$

的粘性上解和下解. 再次应用 [38, 定理 B.1] 的比较原理我们可得

$$w^*(t, x) \leq w_1^{\sigma, \rho}(t, x), \quad (t, x) \in (\rho, \infty) \times \mathbb{R}.$$

在 (2.53) 让 $\rho \rightarrow 0$ 发现 $w^* \leq w_1^\sigma$, 其中

$$w_1^\sigma(t, x) = \sup_{\vartheta \in \Theta} \inf_{\gamma(\cdot) \in \mathbb{X}} \left\{ \int_0^{t \wedge \vartheta[\gamma(\cdot)]} L_1(t-s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \mid \gamma(0) = x, \gamma(t) \in G_\sigma \right\}.$$

让 $\sigma \rightarrow 0$ 可得

$$w_1^\sigma(t, x) \rightarrow w_1(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R},$$

因此我们得到了 (2.51).

仍需证明 $w_1 = \max\{J_1, 0\}$. 从 (2.37) 可知 w_1 是 (2.33) 上的局部 Lipschitz 连续的粘性解 (参见 [37, 定理 5.2] 和 [38, 定理 D.2]). 而且, 因为 J_1 验证了 Freidlin 的条件 (2.41) (参见命题 2.2(b)), 从 [43, 定理 1] 或者 [38, 定理 5.1] 我们得到 $w_1(t, x) = \max\{J_1(t, x), 0\}$. 故我们完成了 (2.50) 的证明.

最后, 验证 $c_1 > \bar{c}_{\text{nlp}}$, 其意味着引理的叙述的范围是定义明确的且位于 $P = \{(t, x) : J_1(t, x) > 0\}$ 内. 事实上, 它遵从直接的计算: 当 $c_1 > 2$,

$$c_1 - \bar{c}_{\text{nlp}} = \frac{c_1}{2} + \sqrt{a} - \frac{1-a}{\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}} = \frac{c_1^2 - 4}{2c_1 - 4\sqrt{a}} > 0.$$

因此, w_1 的表达式是由 (2.40) 中的 J_1 得出的. \square

引理 2.7 假设对某些 $c_1 > \tilde{c}_1 \geq 2$ 使得 (2.25) 成立. 那么存在某 $\delta^* > 0$ 使得

$$w^*(t, x) = w_*(t, x) = w_1(t, x) = w_2(t, x), \quad \{(t, x) : x \geq (c_1 - \delta^*)t\},$$

其中 w_1 和 w_2 在 (2.37) 定义里.

证明. 在 (2.32) 里 w^* 和 w_* 的定义里, 明显可得 $w^* \geq w_*$. 仍需证明在 $\{(t, x) : x \geq (c_1 - \delta^*)t\}$ 里 $w^* \leq w_*$. 通过引理 2.5 和 2.6, 有

$$J_2(t, x) \leq w_2(t, x) \leq w_*(t, x) \leq w^*(t, x) \leq w_1(t, x) = \max\{J_1(t, x), 0\}.$$

由命题 2.2(c), 存在 $\delta^* > 0$ 使得在 $\{(t, x) : x \geq (c_1 - \delta^*)t\}$ 里有 $J_1 = J_2 > 0$. 这得到了想要的结论. \square

推论 2.2 设 $\hat{c} = c_1 - \delta$, 其中 $\delta \in (0, \delta^*]$, 那么

$$u(t, \hat{c}t) = \exp(-(\hat{\mu} + o(1))t), \quad t \gg 1,$$

其中

$$\hat{\mu} = \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}\right) (\hat{c} - \bar{c}_{\text{nlp}}), \quad \bar{c}_{\text{nlp}} = \frac{c_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}}.$$

证明. 鉴于 $\delta \in (0, \delta^*]$, 由引理 2.7 可知对于 $0 < \epsilon \ll 1$,

$$-\epsilon \log u\left(\frac{1}{\epsilon}, \frac{\hat{c}}{\epsilon}\right) = \hat{\mu} + o(1) \iff u\left(\frac{1}{\epsilon}, \frac{\hat{c}}{\epsilon}\right) = \exp\left(-\frac{\hat{\mu} + o(1)}{\epsilon}\right)$$

其中

$$\hat{\mu} = w_1(1, \hat{c}) = \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}\right) (\hat{c} - \bar{c}_{\text{nlp}}),$$

由引理 2.6. 这个证明完成了. □

2.4 估计 c_2 和 \bar{c}_2

在这节中, 我们将会利用当 $c_1 = 2\sqrt{dr}$ 和 $\tilde{c}_1 = 2$ 在 2.3 节得到的结果去确定传播速度 c_2 和 \bar{c}_2 .

命题 2.3 假设 (H_∞) 和 $dr > 1$. 那么

$$c_2 \geq c_{\text{nlp}},$$

其中 c_{nlp} 是定理 2.1 中 (2.3) 给定的.

证明. 由引理 2.6, 有

$$\text{Int} \{(t, x) : w_1(t, x) = 0\} = \{(t, x) : x < c_{\text{nlp}}t\}. \quad (2.55)$$

证明对 $\text{Int} \{(t, x) : w_1(t, x) = 0\}$ 的每一个紧子集 K 使得在 K 上一致地有

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon(t, x) \geq 1 - a. \quad (2.56)$$

诚然, 此外对每一个 $c < c_{\text{nlp}}$, 选择 $K = \{(1, x) : c - 1 \leq x \leq c\}$, 所以

$$K \subset \{(t, x) : x < c_{\text{nlp}}t\} = \text{Int} \{(t, x) : w_1(t, x) = 0\}.$$

那么

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{ct-1 < x < ct} u(t, x) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K u^\epsilon \geq 1 - a > 0,$$

即对所有的 $c < c_{\text{nlp}}$ 有 $\underline{c}_2 \geq c$, 所以 $\underline{c}_2 \geq c_{\text{nlp}}$.

证明 (2.56), 类似 [38, 第 4 节] 的论证. 让 K 和 K' 紧子集以便 $K \subset \text{Int } K' \subset K' \subset \text{Int } \{(t, x) : w_1(t, x) = 0\}$. 由引理 2.6 中的 (2.50) 和引理 2.6 中的 (2.50) 和 $0 \leq w_* \leq w^* \leq w_1$, 在 $\{(t, x) : w_1(t, x) = 0\}$ 里有 $w_*(t, x) = w^*(t, x) = 0$. 因此, 在 K' 上一致地有 $w^\epsilon(t, x) \rightarrow 0$. 固定 $(t_0, x_0) \in K$ 和考虑试验函数

$$\rho(t, x) = |x - x_0|^2 + (t - t_0)^2.$$

那么对所有小的 ϵ , 函数 $w^\epsilon - \rho$ 有一个局部最大值点 (t_ϵ, x_ϵ) 使得当 $\epsilon \rightarrow 0$ 有 $(t_\epsilon, x_\epsilon) \rightarrow (t_0, x_0)$. 此外, $\partial_t \rho(t_\epsilon, x_\epsilon), \partial_x \rho(t_\epsilon, x_\epsilon) \rightarrow 0$, 所以在 (t_ϵ, x_ϵ) 点上,

$$o(1) = \partial_t \rho - \epsilon \partial_{xx} \rho + |\partial_x \rho|^2 \leq \partial_t w^\epsilon - \epsilon \partial_{xx} w^\epsilon + |\partial_x w^\epsilon|^2 \leq u^\epsilon - 1 + a,$$

其中第二个不等式是由于 $v^\epsilon \leq 1$. 这满足

$$u^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon) \geq 1 - a + o(1).$$

根据 $w^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon) \geq (w^\epsilon - \rho)(t_\epsilon, x_\epsilon) \geq (w^\epsilon - \rho)(t_0, x_0) = w^\epsilon(t_0, x_0)$, 有

$$-\epsilon \log u^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon) = w^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon) \geq w^\epsilon(t_0, x_0) = -\epsilon \log u^\epsilon(t_0, x_0),$$

以便 $u^\epsilon(t_0, x_0) \geq u^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon) \geq 1 - a + o(1)$. 因此对 $(t_0, x_0) \in K$ 而言这个论证是一致的, 我们推出 (2.56). 这完成了证明. \square

命题 2.4 在 (H_∞) 和 $dr > 1$ 假设下, 有

$$\bar{c}_2 \leq \max\{c_{\text{LLW}}, c_{\text{nlp}}\},$$

其中 c_{LLW} 由定理 1.1 给定和 c_{nlp} 由 (2.3) 定义.

证明. 标记 $\hat{c} = c_1 - \delta^*$, 其中 $c_1 = 2\sqrt{dr}$ 和 δ^* 由引理 2.7 给定. 由推论 2.2 可知

$$u(t, \hat{c}t) = \exp(-(\hat{\mu} + o(1))t), \quad t \gg 1.$$

这里

$$\hat{\mu} = \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}\right) (\hat{c} - \bar{c}_{\text{nlp}}) = \hat{c} \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}\right) - \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}\right)^2 - (1 - a), \quad (2.57)$$

这里利用

$$\bar{c}_{\text{nlp}} = \frac{c_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}}. \quad (2.58)$$

为了稍后的目的标记 (2.57) 和 (2.58) 是关于 $\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}$ 的二次方程, 所以

$$\frac{c_1}{2} - \sqrt{a} = \frac{\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4(\hat{\mu} + 1 - a)}}{2} = \frac{\bar{c}_{\text{nlp}} - \sqrt{\bar{c}_{\text{nlp}}^2 - 4(1-a)}}{2}. \quad (2.59)$$

而且, 由命题 2.1, 我们得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v)(t, \hat{c}t) = (0, 1), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (u, v)(t, 0) = (k_1, k_2).$$

那么应用引理 2.2(a) 我们推出

$$\bar{c}_2 \leq c_{\hat{c}, \hat{\mu}} = \begin{cases} c_{\text{LLW}}, & \hat{\mu} \geq \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}), \\ \hat{c} - \frac{2\hat{\mu}}{\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4(\hat{\mu} + 1 - a)}}, & \hat{\mu} < \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}). \end{cases} \quad (2.60)$$

为了完成证明, 我们只需要验证 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}} = \max\{c_{\text{LLW}}, c_{\text{nlp}}\}$, 其中

$$c_{\text{nlp}} = \begin{cases} \bar{c}_{\text{nlp}}, & c_1 \leq 2(\sqrt{a} + \sqrt{1-a}), \\ 2\sqrt{1-a}, & c_1 > (\sqrt{a} + \sqrt{1-a}). \end{cases}$$

(i) 对情况 $\frac{c_1}{2} - \sqrt{a} < \lambda_{\text{LLW}}$, 有 $\frac{c_1}{2} - \sqrt{a} < \lambda_{\text{LLW}} \leq \sqrt{1-a}$, 所以

$$c_{\text{nlp}} = \bar{c}_{\text{nlp}} = \frac{c_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}} > \lambda_{\text{LLW}} + \frac{1-a}{\lambda_{\text{LLW}}} = c_{\text{LLW}}.$$

(注 $h(s) = s + \frac{1-a}{s}$ 在 $(0, \sqrt{1-a}]$ 是严格递减的.) 因此,

$$\hat{\mu} = \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}\right)(\hat{c} - \bar{c}_{\text{nlp}}) < \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}).$$

由 (2.60), 所以 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}} = \hat{c} - \frac{2\hat{\mu}}{\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4(\hat{\mu} + 1 - a)}}$. 使用 (2.57) 和 (2.59), 有

$$c_{\hat{c}, \hat{\mu}} = \hat{c} - \frac{1}{\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}} \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}\right) (\hat{c} - \bar{c}_{\text{nlp}}) = \bar{c}_{\text{nlp}} = \max\{c_{\text{nlp}}, c_{\text{LLW}}\};$$

(ii) 对于情况 $\frac{c_1}{2} - \sqrt{a} \geq \lambda_{\text{LLW}}$, 有 $c_{\text{nlp}} \leq c_{\text{LLW}}$. 通过 (2.57) 和 $c_{\text{LLW}} = \lambda_{\text{LLW}} + \frac{1-a}{\lambda_{\text{LLW}}}$, 我们得到

$$\hat{\mu} = \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}\right) \hat{c} - \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}\right)^2 - (1-a) \geq \lambda_{\text{LLW}} \hat{c} - \lambda_{\text{LLW}}^2 - (1-a) = \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}),$$

其中不等式成立由于 $\lambda \hat{c} - \lambda^2 - (1-a)$ 是一个关于 λ 在 $(0, \frac{\hat{c}}{2})$ 上单调上升的函数. 因此由 (2.60), 可得 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}} = c_{\text{LLW}} = \max\{c_{\text{nlp}}, c_{\text{LLW}}\}$.

这完成了命题 2.4 的证明. \square

定理 2.1 的证明. c_{nlp} 是定理 2.1 中 (2.3) 给定的. 由命题 2.1, 仍需证明 $c_2 \geq c_{\text{nlp}}$ 和 $\bar{c}_2 \leq \max\{c_{\text{LLW}}, c_{\text{nlp}}\}$. 这些分别在命题 2.3 和 2.4 已证. \square

2.5 $dr = 1$ 情形

这里, 我们通过应用定理 2.1 去证明定理 2.2.

定理 2.2 的证明. (u, v) 是 (1.2) 的解其初值 (u_0, v_0) 满足 (H_∞) . 对任意小的 $\delta \in (0, 1)$, $(\underline{u}^\delta, \bar{v}^\delta)$ 和 $(\bar{u}^\delta, \underline{v}^\delta)$ 分别是

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = u(1 - u - av), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t v - d\partial_{xx} v = rv(1 + \delta - bu - v), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.61)$$

和

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = u(1 - u - av), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t v - d\partial_{xx} v = rv(1 - \delta - bu - v), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.62)$$

的解其有相同的初值 (u_0, v_0) . 通过比较, 我们推出

$$(\underline{u}^\delta, \bar{v}^\delta)(t, x) \preceq (u, v)(t, x) \preceq (\bar{u}^\delta, \underline{v}^\delta)(t, x), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (2.63)$$

注意到 $(\underline{u}^\delta, \bar{v}^\delta)$ 是 (2.61) 解当且仅当

$$(\underline{U}^\delta, \bar{V}^\delta) = \left(\underline{u}, \frac{\bar{v}^\delta}{1 + \delta} \right) \quad (2.64)$$

是

$$\begin{cases} \partial_t U - \partial_{xx} U = U(1 - U - \bar{a}^\delta V), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t V - d\partial_{xx} V = \bar{r}^\delta V(1 - \underline{b}^\delta U - V), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.65)$$

的解, 其中 $\bar{a}^\delta = (1 + \delta)a$, $\bar{r}^\delta = (1 + \delta)r$ 和 $\underline{b}^\delta = \frac{b}{1 + \delta}$. 选择足够小的 δ 观察到 $d\bar{r}^\delta > 1$ 和 $0 < \bar{a}^\delta, \underline{b}^\delta < 1$. 应用定理 2.1 到 (2.64) 和 (2.65), 对每个小的 $\eta > 0$, 我

们得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (\bar{c}_1^\delta + \eta)t} (|\underline{u}^\delta(t, x)| + |\bar{v}^\delta(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\underline{c}_2^\delta + \eta)t < x < (\bar{c}_1^\delta - \eta)t} (|\underline{u}^\delta(t, x)| + |\bar{v}^\delta(t, x) - (1 + \delta)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\underline{c}_3^\delta + \eta)t < x < (\bar{c}_2^\delta - \eta)t} (|\underline{u}^\delta(t, x) - \underline{k}_1^\delta| + |\bar{v}^\delta(t, x) - (1 + \delta)\bar{k}_2^\delta|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < (\underline{c}_3^\delta - \eta)t} (|\underline{u}^\delta(t, x) - 1| + |\bar{v}^\delta(t, x)|) = 0, \end{array} \right. \quad (2.66)$$

其中

$$\bar{c}_1^\delta = 2\sqrt{d\bar{r}^\delta}, \quad \underline{c}_2^\delta = \max\{\underline{c}_{\text{LLW}}^\delta, \underline{c}_{\text{nlp}}^\delta\}, \quad \underline{c}_3^\delta = -\bar{c}_{\text{LLW}}^\delta,$$

当 $\delta \rightarrow 0$,

$$(\underline{k}_1^\delta, \bar{k}_2^\delta) = \left(\frac{1 - \bar{a}^\delta}{1 - \bar{a}^\delta \bar{b}^\delta}, \frac{1 - \bar{b}^\delta}{1 - \bar{a}^\delta \bar{b}^\delta} \right) \rightarrow (k_1, k_2),$$

和传播速度 $\underline{c}_{\text{LLW}}^\delta$ ($\bar{c}_{\text{LLW}}^\delta$) 是定理 1.1 中的 (2.65) (注记 1.1), 和

$$\underline{c}_{\text{nlp}}^\delta = \begin{cases} \sqrt{d\bar{r}^\delta} - \sqrt{\bar{a}^\delta} + \frac{1 - \bar{a}^\delta}{\sqrt{d\bar{r}^\delta} - \sqrt{\bar{a}^\delta}}, & \sqrt{d\bar{r}^\delta} \leq \sqrt{\bar{a}^\delta} + \sqrt{1 - \bar{a}^\delta}, \\ 2\sqrt{1 - \bar{a}^\delta}, & \sqrt{d\bar{r}^\delta} > \sqrt{\bar{a}^\delta} + \sqrt{1 - \bar{a}^\delta}. \end{cases}$$

和 (2.63) 一起, 特别地 (2.66) 表明

$$\bar{c}_1 \leq \bar{c}_1^\delta, \quad \underline{c}_2 \geq \underline{c}_2^\delta, \quad \underline{c}_3 \geq \underline{c}_3^\delta.$$

由 $\underline{c}_{\text{LLW}}^\delta$ 和 $\bar{c}_{\text{LLW}}^\delta$ 关于 δ 的连续性, (参见 [96, 章节 3 的定理 4.2]), 让 $\delta \rightarrow 0$ 满足

$$\bar{c}_1 \leq 2, \quad \underline{c}_2 \geq 2, \quad \underline{c}_3 \geq -\bar{c}_{\text{LLW}}. \quad (2.67)$$

相似地, 通过观察 $(\bar{u}^\delta, \underline{v}^\delta)$ 是 (2.62) 的解当且仅当

$$(\bar{U}^\delta, \underline{V}^\delta) = \left(\bar{u}^\delta, \frac{\underline{v}^\delta}{1 - \delta} \right)$$

是

$$\begin{cases} \partial_t U - \partial_{xx} U = U(1 - U - \underline{a}^\delta V), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t V - d\partial_{xx} V = \underline{r}^\delta V(1 - \bar{b}^\delta U - V), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.68)$$

的解, 其中 $\underline{a}^\delta = (1 - \delta)a$, $\underline{r}^\delta = (1 - \delta)r$ 和 $\bar{b}^\delta = \frac{b}{1 - \delta}$. 这次, 通过选取足够小的 δ 有 $d\underline{r}^\delta < 1$ 和 $0 < \underline{a}^\delta, \bar{b}^\delta < 1$. 应用推论 2.1 到 (2.68). 注意到 (2.63) 和让 $\delta \rightarrow 0$, 我们推出

$$\underline{c}_1 \geq 2, \quad \bar{c}_2 \leq 2, \quad \bar{c}_3 \leq -\tilde{c}_{LLW}. \quad (2.69)$$

由 \underline{c}_i 和 \bar{c}_i 的定义, 对于 $i = 1, 2, 3$ 我们可得 $\underline{c}_i \leq \bar{c}_i$. 与 (2.67) 和 (2.69) 一起证明定理 2.2. \square

2.6 引理 2.2 的证明

在这节中, 我们证明引理 2.2, 在证明命题 2.1 和定理 2.4 都用到了它.

引理 2.2 的证明. 仅证明 (a), 因为用类似的论证可证明 (b).

步骤 1. 首先证明

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq \hat{c}t} \tilde{u}(t, x) \leq k_1, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq x \leq \hat{c}t} \tilde{v}(t, x) \geq k_2. \quad (2.70)$$

由引理 2.1(a), 它足够证明 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq x \leq \hat{c}t} \tilde{v}(t, x) > 0$. 因为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{u}, \tilde{v})(t, 0) = (k_1, k_2), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{u}, \tilde{v})(t, \hat{c}t) = (0, 1),$$

固定 $T > 0$ 使得

$$\inf_{t \geq T} \{\tilde{v}(t, 0), \tilde{v}(t, \hat{c}t)\} > 0.$$

定义 $\delta' := \min \left\{ \frac{1-b}{2}, \inf_{0 < x < \hat{c}T} \tilde{v}(T, x), \inf_{t \geq T} \{\tilde{v}(t, 0), \tilde{v}(t, \hat{c}t)\} \right\} > 0$. 注意到 \tilde{v} 是 KPP-型方程 $\partial_t \tilde{v} = d\partial_{xx} \tilde{v} + r\tilde{v}(1 - b - \tilde{v})$ 在域 $\Omega' := \{(t, x) : t \geq T, 0 \leq x \leq \hat{c}t\}$ 内的上解且在抛物边界上有 $\tilde{v}(t, x) \geq \delta' > 0$. 因为 $\tilde{v} - \delta'$ 不可能达到负的内部的最小值, 我们推出在 Ω' 内 $\tilde{v}(t, x) \geq \delta'$, 这完成了步骤 1.

对一个小的将会在后面确定的 $\delta > 0$, 考虑

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} = \partial_{xx} \tilde{u} + \tilde{u}(1 + 2\delta - \tilde{u} - a\tilde{v}), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t \tilde{v} = d\partial_{xx} \tilde{v} + r\tilde{v}(1 - 2\delta - b\tilde{u} - \tilde{v}), & (0, \infty) \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.71)$$

用 c_{LLW}^δ 表示 (2.71) 的同质的共存平衡解 (k_1^δ, k_2^δ) 入侵 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \approx (0, 1 - 2\delta)$ 域内的传播速度. 由 [96, 章节 3 的定理 4.2] 参数的连续依赖性, 当 $\delta \rightarrow 0$ 有 $c_{\text{LLW}}^\delta \rightarrow c_{\text{LLW}}$, 其中 c_{LLW} 由定理 1.1 给定. 现在定义

$$\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}} = \frac{1}{2} \left(\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4(\hat{\mu} + 1 - a)} \right), \quad (2.72)$$

其中满足 $-\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^2 + \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}} \hat{c} - (1 - a) = \hat{\mu}$. 在引理 2.2 的叙述中考虑到 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}}$, $\hat{\mu}$ 和 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}}$ 能被重述为

$$\hat{\mu} = \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}(\hat{c} - c_{\hat{c}, \hat{\mu}}), \quad c_{\hat{c}, \hat{\mu}} = \begin{cases} c_{\text{LLW}}, & \hat{\mu} \geq \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}), \\ \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}} + \frac{1-a}{\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}}, & \hat{\mu} < \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}). \end{cases} \quad (2.73)$$

步骤 2. 假设 $\hat{\mu} < \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}})$, 所以通过 (2.73) 有

$$c_{\hat{c}, \hat{\mu}} = \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}} + \frac{1-a}{\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}} \iff \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^2 - \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}} c_{\hat{c}, \hat{\mu}} + (1-a) = 0. \quad (2.74)$$

证明对任意 $c > c_{\hat{c}, \hat{\mu}}$ 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{u}(t, x) = 0. \quad (2.75)$$

首先, 证明 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}} > c_{\text{LLW}}$. 考虑辅助函数

$$f(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4(1-a)}}{2} (\hat{c} - z).$$

通过直接计算, $f(z)$ 在 $z \in [2\sqrt{1-a}, \hat{c}]$ 上递减. 鉴于 (2.13) 和 (2.74), 有 $f(c_{\hat{c}, \hat{\mu}}) = \hat{\mu}$ 和 $f(c_{\text{LLW}}) = \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}})$. 因为 $\hat{\mu} < \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}})$ 和 f 是递减的, 推出 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}} > c_{\text{LLW}}$.

让 $\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta = \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}} - \delta$ 和 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta = \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta + \frac{1-a+2\delta(1+a)}{\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta}$. 鉴于

$$(\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta)^2 - \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta + (1-a) + 2\delta(1+a) = 0, \quad (2.76)$$

和 (2.73), 我们推出后面将会用到的下列不等式.

$$\begin{aligned} \hat{\mu} - \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta (\hat{c} - c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta) &= \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}} (\hat{c} - c_{\hat{c}, \hat{\mu}}) - \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta (\hat{c} - c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta) \\ &= \hat{c}\delta - \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}} c_{\hat{c}, \hat{\mu}} + \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta \\ &> \hat{c}\delta - \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^2 + (\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta)^2 \\ &= \delta(\sqrt{\hat{c}^2 - 4(\hat{\mu} + 1 - a)} + \delta) > 0, \end{aligned} \quad (2.77)$$

这里对不等式应用 (2.74) 和 (2.76), 和对最后一个等式用到了 $\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta = \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}} - \delta$ 和 (2.72).

因为 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}} > c_{\text{LLW}}$, 由 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta$ 和 c_{LLW}^δ 关于 δ 的连续性 (参见, [96, 章节 3 的定理 4.2]), 选择小的 δ 以致于 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta > c_{\text{LLW}}^\delta$. 因为 c_{LLW}^δ 是最小的行波解的速度, 这确保了对于 (2.71) 波速为 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta$ 的行波解的存在性. $(\varphi^\delta, \psi^\delta)(s)$ 有 $\varphi^\delta(0) = k_1 + \delta$ 且是

$$\begin{cases} -c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta \varphi' = \varphi'' + \varphi(1 + 2\delta - \varphi - a\psi), & s \in \mathbb{R}, \\ -c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta \psi' = d\psi'' + r\psi(1 - 2\delta - b\varphi - \psi), & s \in \mathbb{R}, \\ (\varphi, \psi)(-\infty) = (k_1^\delta, k_2^\delta), (\varphi, \psi)(\infty) = (0, 1 - 2\delta), \end{cases} \quad (2.78)$$

的行波解.

为了得到 (2.75), 首先证明存在 T_1 和 x_1 使得

$$(\tilde{u}, \tilde{v})(t, x) \leq (\varphi^\delta, \psi^\delta)(x - c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta t - x_1), \quad t \geq T_1, 0 \leq x \leq \hat{c}t. \quad (2.79)$$

为了应用比较原理, 需要验证下列条件:

- (i) 对于 $0 \leq x \leq \hat{c}T_1$, $(\tilde{u}, \tilde{v})(T_1, x) \leq (\varphi^\delta, \psi^\delta)(x - c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta T_1 - x_1)$;
- (ii) 对于 $t \geq T_1$, $(\tilde{u}, \tilde{v})(t, 0) \leq (\varphi^\delta, \psi^\delta)(-c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta t - x_1)$;
- (iii) 对于 $t \geq T_1$, $(\tilde{u}, \tilde{v})(t, \hat{c}t) \leq (\varphi^\delta, \psi^\delta)((\hat{c} - c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta)t - x_1)$.

首先, 确认条件 (iii). 因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}(t, \hat{c}t) = 1$, 选择 T_2 使得对所有的 $t \geq T_2$, $x_1 \geq 0$ 有

$$\tilde{v}(t, \hat{c}t) \geq 1 - \delta \geq \psi^\delta(\infty) \geq \psi^\delta((\hat{c} - c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta)t - x_1).$$

同时, 因为 $c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta > c_{\text{LLW}}^\delta$, 在无穷远处, 即 $s \rightarrow \infty$ 时, φ^δ 的表达式 (参见 [55]) 为

$$\varphi^\delta(s) = A \exp\{-(\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta + o(1))s\}.$$

由 (2.77), 有 $\hat{\mu} > \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta(\hat{c} - c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta)$. 注意到, 由引理的假设, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{u}(t, \hat{c}t) \leq \exp\{-\hat{\mu} + o(1)t\}$. 选择 $T_1 > T_2$ 使得对 $t \geq T_1$, $x_1 \geq 0$ 有

$$\tilde{u}(t, \hat{c}t) < \varphi^\delta((\hat{c} - c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta)t - x_1),$$

这验证了 (iii). 接下来, 选择 $x_1 \gg 1$ (由步骤 1) 使得 (i) 和 (ii) 成立. 应用比较原理我们推出 (2.79).

因此, 对每一个 $\delta > 0$, 我们得到对于 $c > c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta$, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > ct} \tilde{u}(t, x) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > ct} \varphi^\delta(x - c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta t - x_1) = 0.$$

因为对所有的 $\delta > 0$ 上面式子成立, 我们推出对每一个 $c > \lim_{\delta \rightarrow 0} c_{\hat{c}, \hat{\mu}}^\delta = c_{\hat{c}, \hat{\mu}}$, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > ct} \tilde{u}(t, x) \leq 0.$$

因此 (2.75) 成立.

步骤 3. 假设 $\hat{\mu} \geq \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}})$. 那么, 对每一个 $0 < \hat{\mu}' < \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}})$, 有

$$\tilde{u}(t, \hat{c}t) \leq \exp(-\hat{\mu}'t), \quad t \gg 1.$$

因此, 重复步骤 2 我们推出对每一个 $c > c_{\hat{c}, \hat{\mu}'}$ 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > ct} \tilde{u}(t, x) = 0. \quad (2.80)$$

让 $\hat{\mu}' \rightarrow \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}})$, 通过直接计算有

$$\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}'} = \frac{1}{2} \left(\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4(\hat{\mu}' + 1 - a)} \right) \rightarrow \lambda_{\text{LLW}},$$

以致于

$$c_{\hat{c}, \hat{\mu}'} = \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}'} + \frac{1 - a}{\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}'}} \rightarrow c_{\text{LLW}}.$$

因此, 推出对每一个 $c > c_{\text{LLW}}$ 有 (2.80) 成立. 引理 2.2 的证明完成. \square

2.7 命题 2.2 的证明

这节致力于命题 2.2 的证明.

给定 $c_1 > \tilde{c}_1 \geq 2$ 和由 (2.38) 给定 $J_i(t, x)$, 可等价表示为

$$J_i(t, x) = \inf_{\gamma(\cdot) \in \mathbb{Y}^{t, x}} \left\{ \int_0^t L_i(s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right\}, \quad (2.81)$$

其中 L_i 由 (2.39) 给定, 且 $\mathbb{Y}^{t, x} = \{\gamma \in H^1([0, t]) : \gamma(0) \leq 0, \gamma(t) = x\}$.

命题 2.2(a) 的证明. 将证明分成几个步骤.

步骤 1. 称对于任意 $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, 存在某一 $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^{t,x} \in \mathbb{Y}^{t,x}$ 使得

$$J_1(t, x) = \int_0^t L_1(s, \hat{\gamma}(s), \dot{\hat{\gamma}}(s)) ds.$$

固定任意 $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$. 对某一 $k \geq 1$, 由 (2.81), 存在某一 $\gamma_k \in \mathbb{Y}^{t,x}$ 使得

$$\int_0^t L_1(s, \gamma_k(s), \dot{\gamma}_k(s)) ds \leq J_1(t, x) + 1/k. \quad (2.82)$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ 在 $H^1([0, t])$ 上是一致有界的. 这是因为 (i) 由 L^1 的定义可知 $\{\dot{\gamma}_k\}$ 在 L^2 上是一致有界的, 且 (ii) $\gamma_k(t) = x$. 取一组子序列, 可进一步假设存在某一 $\hat{\gamma} \in \mathbb{Y}^{t,x}$ 使得在 $H^1([0, t])$ 上有 $\gamma_k \rightharpoonup \hat{\gamma}$. 对 (2.82) 让 $k \rightarrow \infty$, 因此我们得到

$$J_1(t, x) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^t L_1(s, \gamma_k(s), \dot{\gamma}_k(s)) ds \geq \int_0^t L_1(s, \hat{\gamma}(s), \dot{\hat{\gamma}}(s)) ds \geq J_1(t, x),$$

其中由 (2.81) 得到最后一个不等式. 从而步骤 1 完成了.

步骤 2. 由步骤 1 给定 $\hat{\gamma} \in \mathbb{Y}^{t,x}$. 证明如果 $x \geq 0$ 那么 $\hat{\gamma}(0) = 0$.

设 $t_1 = \inf\{s \in [0, t] : \hat{\gamma}(s) \geq 0\}$. 定义另一条路径 $\tilde{\gamma} \in \mathbb{X}$:

$$\text{对 } s \in [0, t_1] \text{ 有 } \tilde{\gamma}(s) = 0, \quad \text{对 } s \in (t_1, t] \text{ 有 } \tilde{\gamma}(s) = \hat{\gamma}(s),$$

那么

$$\begin{aligned} & \int_0^t L_1(s, \hat{\gamma}(s), \dot{\hat{\gamma}}(s)) ds \\ &= \int_0^{t_1} \left[\frac{|\dot{\hat{\gamma}}(s)|^2}{4} - 1 + a\chi_{\{\hat{\gamma}(s) < c_1 s\}} \right] ds + \int_{t_1}^t \left[\frac{|\dot{\hat{\gamma}}(s)|^2}{4} - 1 + a\chi_{\{\hat{\gamma}(s) < c_1 s\}} \right] ds \\ &\geq \int_0^{t_1} [-1 + a] ds + \int_{t_1}^t \left[\frac{|\dot{\hat{\gamma}}(s)|^2}{4} - 1 + a\chi_{\{\hat{\gamma}(s) < c_1 s\}} \right] ds \\ &= \int_0^t L_1(s, \tilde{\gamma}(s), \dot{\tilde{\gamma}}(s)) ds. \end{aligned}$$

因为 $\hat{\gamma}$ 是最小的路径, 等式必须成立, 所以 $\int_0^{t_1} |\dot{\hat{\gamma}}(s)|^2 ds = 0$, 且有 $\hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}(t_1) = 0$.

步骤 3. 对于 $\frac{x}{t} \geq c_1$, 展示 $J_1(t, x) = J_2(t, x) = \frac{t}{4} \left(\frac{x^2}{t^2} - 4 \right)$.

仅证明 $J_1(t, x) = \frac{t}{4} \left(\frac{x^2}{t^2} - 4 \right)$, 另一个由相同的论证可得. 由 Hölder 不等式, $J_1(t, x) \geq \frac{1}{4t} \left(\int_0^t |\dot{\gamma}(s)| ds \right)^2 - \int_0^t ds = \frac{x^2}{4t} - t$. 因为对 $s \in [0, t]$ 通过路径 $\hat{\gamma}(s) = \frac{x}{t} \cdot s$ 极小值可得到, $J_1(t, x) = \frac{t}{4} \left(\frac{x^2}{t^2} - 4 \right)$.

步骤 4. 对于 $0 \leq \frac{x}{t} \leq c_1$, 让 $\hat{\gamma}$ 由步骤 1 给定, 且定义

$$\tau = \sup \{s \in [0, t] : \hat{\gamma}(s) \geq c_1 s\}. \quad (2.83)$$

证明 $\hat{\gamma} = \gamma_1$, 其中

$$\gamma_1(s) = \begin{cases} c_1 s, & 0 \leq s \leq \tau, \\ c_1 \tau + \frac{s-\tau}{t-\tau} (x - c_1 \tau), & \tau < s \leq t. \end{cases}$$

因为 $\hat{\gamma}(\tau) = c_1 \tau$, 有

$$\int_0^\tau \frac{|c_1|^2}{4} ds = \frac{1}{4\tau} \left[\int_0^\tau \dot{\hat{\gamma}}(s) ds \right]^2 \leq \int_0^\tau \frac{|\dot{\hat{\gamma}}(s)|^2}{4} ds, \quad (2.84)$$

和

$$\int_\tau^t \frac{1}{4} \left| \frac{x - c_1 \tau}{t - \tau} \right|^2 ds = \frac{1}{4(t - \tau)} \left[\int_\tau^t \dot{\hat{\gamma}}(s) ds \right]^2 \leq \int_\tau^t \frac{|\dot{\hat{\gamma}}(s)|^2}{4} ds. \quad (2.85)$$

假设 $\hat{\gamma} \not\equiv \gamma_1$, 那么 (2.84) 和 (2.85) 的其中一个不等式是严格的, 所以

$$\begin{aligned} & \int_0^t L_1(s, \gamma_1(s), \dot{\gamma}_1(s)) ds \\ &= \int_0^\tau \left[\frac{|c_1|^2}{4} - 1 \right] ds + \int_\tau^t \left[\frac{1}{4} \left| \frac{x - c_1 \tau}{t - \tau} \right|^2 - 1 + a \right] ds \\ &< \int_0^\tau \left[\frac{|\dot{\hat{\gamma}}(s)|^2}{4} - 1 \right] ds + \int_\tau^t \left[\frac{|\dot{\hat{\gamma}}(s)|^2}{4} - 1 + a \right] ds \\ &= \int_0^t L_1(s, \hat{\gamma}(s), \dot{\hat{\gamma}}(s)) ds. \end{aligned}$$

这与 $\hat{\gamma}$ 的定义矛盾, 所以 $\hat{\gamma} \equiv \gamma_1$.

步骤 5. 对于 $\frac{x}{t} \leq c_1$, $\hat{\gamma}$ 由步骤 1 给定. 证明对 $s \in [0, t]$ 有 $\hat{\gamma}(s) \leq c_1 s$.

我们分别考虑两种情况: (i) $0 \leq \frac{x}{t} \leq c_1$ 和 (ii) $\frac{x}{t} < 0$. 对于 (i), 由步骤 4, 直接推出对 $s \in [0, t]$ 通过显式的确定了的极小化的路径有 $\hat{\gamma}(s) \leq c_1 s$. 对情形 (ii), 如果对 $s \in [0, t]$ 有 $\hat{\gamma}(s) \leq 0$, 那么已证; 否则, 存在某一 $\tau' \in [0, t]$ 使得 $\hat{\gamma}(\tau') = 0$ 且对于 $s \in (\tau', t]$ 有 $\hat{\gamma}(s) < 0$. 由动态规划原理, 重写 J_1 如下

$$\begin{aligned} J_1(t, x) &= \int_0^{\tau'} L_1(s, \hat{\gamma}(s), \dot{\hat{\gamma}}(s)) ds + \int_{\tau'}^t L_1(s, \hat{\gamma}(s), \dot{\hat{\gamma}}(s)) ds \\ &= \inf_{\gamma(\cdot) \in \mathbb{Y}^{\tau', 0}} \left\{ \int_0^{\tau'} L_1(s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right\} + \int_{\tau'}^t L_1(s, \hat{\gamma}(s), \dot{\hat{\gamma}}(s)) ds. \end{aligned}$$

那么由步骤 4, 我们推出对于 $s \in [0, \tau']$ 有 $\hat{\gamma}(s) \leq c_1 s$. 这个, 和 τ' 的定义一起, 表明对 $s \in [0, t]$ 有 $\hat{\gamma}(s) \leq c_1 s$, 这完成了步骤 5 的证明.

步骤 6. 对于 $x < 0$, 证明 $J_1(t, x) = -t(1 - a)$.

由步骤 5 可知极小化路径 $\hat{\gamma}$ 一直停留在 $\{(t, x) : x \leq c_1 t\}$. 因此 $J_1(t, x) \geq \int_0^t (-1 + a) ds = -t(1 - a)$. 另一方面, 对于 $s \in [0, t]$ 通过构造路径 $\hat{\gamma}(s) \equiv x$ 极小值能得到. 因此, $J_1(t, x) = -t(1 - a)$.

步骤 7. 验证命题 2.2(a), 即(2.40).

由步骤 3 和 6, 仍需考虑 $0 \leq \frac{x}{t} < c_1$. 在这种情况下, 如果 $c_1 - 2\sqrt{a} \leq \frac{x}{t} < c_1$, 由步骤 4, 有 $\hat{\gamma} = \gamma_1$ 且因此

$$\begin{aligned} J_1(t, x) &= \inf_{0 \leq \tau < t} \left\{ \frac{(x - c_1 \tau)^2}{4(t - \tau)} - (1 - a)(t - \tau) + \tau \left(\frac{c_1^2}{4} - 1 \right) \right\} \\ &= \inf_{0 < s \leq t} \left\{ \frac{(x - c_1 t)^2}{4s} + \frac{c_1(x - c_1 t)}{2} - t + as + \frac{c_1^2}{4} t \right\} \\ &= \left[\frac{c_1}{2} - \sqrt{a} \right] [x - \bar{c}_{\text{nlp}} t], \end{aligned} \tag{2.86}$$

其中 $\bar{c}_{\text{nlp}} = \frac{c_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{\frac{c_1}{2} - \sqrt{a}}$.

另一方面, 如果 $0 \leq \frac{x}{t} < c_1 - 2\sqrt{a}$, 那么由上面的计算, $\frac{(x - c_1 t)^2}{4(t - \tau)} + a(t - \tau)$ 关于 τ 在 $0 \leq \frac{x}{t} < c_1 - 2\sqrt{a}$ 内是递增函数. 因此在 $\tau = 0$ 上极小值取到, 由此由 (2.86) 的第一个等式, 直接得到

$$J_1(t, x) = \frac{t}{4} \left[\frac{x^2}{t^2} - 4(1 - a) \right].$$

完成命题 2.2(a) 的证明. □

命题 2.2(b) 的证明. Friedlin 的条件 (2.41) 是下列两个的观察的直接的结果:

(i) (由 (2.40)) 存在 $c_0 \in (0, c_1)$ 使得

$$P = \{(t', x') : J_1(t', x') > 0, t' > 0\} = \{(t', x') : x' > c_0 t', t' > 0\}.$$

(ii) 因为在命题 2.2(a) 的证明中所有的可能性都已经被考虑了, 可推出对每一个 $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$, $J_1(t, x) = 0$ 的最优路径是对某一个 $\tau \in [0, t)$ 连接 $(0, 0), (\tau, c_1 \tau)$ 和 (t, x) 的分段直线. 特别对 $(t, x) \in \partial P = \{(t', x') : x' = c_0 t'\}$ 可知 Freidlin 条件 (2.41) 成立.

因此完成证明. □

命题 2.2(c) 的证明. 给定 $c_1 > \tilde{c}_1 \geq 2$. 首先, 由在 (2.81) 里 J_i ($i = 1, 2$) 的定义观察到对于 $k > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$, 有

$$J_i(kt, kx) = kJ_i(t, x). \quad (2.87)$$

最后证明存在某一 $\delta^* > 0$ 使得对于所有的 $(t, x) \in B_{\delta^*}(1, c_1)$ 有 $J_1(t, x) = J_2(t, x)$, 其中 $B_{\delta^*}(1, c_1)$ 是一个在 \mathbb{R}^2 内以 $(1, c_1)$ 为圆心半径为 δ^* 的圆盘.

固定 $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ 和对于 $(t, x) \in B_{\delta^*}(1, c_1)$, $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^{t,x}$ 是 $J_1(t, x)$ 的极小值路径. 称 $\hat{\gamma}$ 也是 $J_2(t, x)$ 的极小化路径. 为此, 定义

$$\mathbb{Y}_1^{t,x} = \left\{ \gamma \in H^1([0, t]) \mid \gamma(0) \leq 0, \gamma(t) = x, \text{ 和对某一 } s \text{ 有 } \gamma(s) \leq \tilde{c}_1 s \right\}.$$

定义 $B_{\delta^*}^+(1, c_1) := \{(t, x) \in B_{\delta^*}(1, c_1) \mid \frac{x}{t} \geq c_1\}$. 由命题 2.2(a) 的证明中的步骤 2, 对于所有的 $\delta^* > 0$, 有

$$J_1(t, x) = J_2(t, x), \quad (t, x) \in B_{\delta^*}^+(1, c_1).$$

同时注意到由命题 2.2(a) 的证明中的步骤 4, 有 $\hat{\gamma}^{1,c_1}(s) = c_1 s$, 所以 $\hat{\gamma}^{1,c_1} \notin \mathbb{Y}_1^{1,c_1}$ (因为 $c_1 > \tilde{c}_1$) 因此存在某一 $\delta_0 > 0$ 使得

$$J_2(1, c_1) = \frac{1}{4}(c_1^2 - 4) < \inf_{\gamma \in \mathbb{Y}_1^{1,c_1}} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{|\dot{\gamma}(s)|^2}{4} - 1 \right] ds \right\} - \delta_0.$$

由 J_2 的连续性, 选择 $\delta^* > 0$ 以便于对于 $(t, x) \in B_{\delta^*}(1, c_1) \setminus B_{\delta^*}^+(1, c_1)$, 有

$$\begin{aligned} J_2(t, x) &\leq J_2(1, c_1) + \frac{\delta_0}{2} \\ &\leq \inf_{\gamma \in \mathbb{Y}_1^{1, c_1}} \int_0^t \left[\frac{|\dot{\gamma}(s)|^2}{4} - 1 \right] ds - \frac{\delta_0}{2} \\ &< \inf_{\gamma \in \mathbb{Y}_1^{t, x}} \int_0^t \left[\frac{|\dot{\gamma}(s)|^2}{4} - 1 \right] ds \\ &\leq \inf_{\gamma \in \mathbb{Y}_1^{t, x}} \int_0^t L_2(s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds, \end{aligned}$$

其表明 $\hat{\gamma}^{t, x} \in \mathbb{Y}^{t, x} \setminus \mathbb{Y}_1^{t, x}$, 即极小化路径一直停留在 $\{x > \tilde{c}_1 t\}$, 因此在 $B_{\delta^*}(1, c_1)$ 内有 $J_1 = J_2$.

考虑 (2.87), 对于 $(t, x) \in B_{\delta^*}(1, c_1)$ 和 $k > 0$ 我们推出,

$$J_1(kt, kx) = kJ_1(t, x) = kJ_2(t, x) = J_2(kt, kx),$$

其表明在 $\{x \geq (c_1 - \delta^*)t\}$ 内有 $J_1(t, x) = J_2(t, x)$. □

第三章 相互作用物种多波的渐近传播 II: 指数衰减的初值

一个自然问题可由 Tang 和 Fife 引出, 假设初值 (u_0, v_0) 在 $x = \pm\infty$ 上与行波解有相同的渐近, 连接 (k_1, k_2) 和 $(0, 0)$ 行波解速度, 是否决定 Cauchy 问题 (1.2) 物种的传播速度? 由第一个问题自然联想对于更一般的指数衰减初始值会发生什么? 这两个物种会以不同的速度传播吗?

3.1 假设和主要结果

3.1.1 假设

我们继续研究柯西问题 (1.2) 解的传播性质. 对于一类初值 (u_0, v_0) 满足 $(u_0, v_0)(-\infty) = (1, 0)$, $(u_0, v_0)(\infty) = (0, 0)$ 和在 ∞ 处 $u_0 \rightarrow 0$ 是以 $\lambda_u > 0$ 指数衰减; $v_0 \rightarrow 0$ 在 ∞ ($-\infty$) 处是以率 $\lambda_v^+ > 0$ ($\lambda_v^- > 0$) 指数衰减, 本章感兴趣的是决定物种 u 和 v 的传播速度. 在这章, 研究初值是指指数衰减的两个竞争物种入侵的栖息地, 关注的是无穷处指数衰减率如何影响物种的传播速度.

对一个函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$, 在 ∞ 处 $g(x) \sim e^{-\lambda x}$ 如果

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} g(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} g(x) < \infty.$$

对于在 $-\infty$ 处 $g(x) \sim e^{\lambda x}$ 的定义是相似的. 初值 (u_0, v_0) 的假设为

$$(H_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \text{初值 } (u_0, v_0) \in C(\mathbb{R}; [0, 1])^2 \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上是严格正的,} \\ \text{且存在正常数 } \theta_0, \lambda_u, \lambda_v^+, \lambda_v^- \text{ 使得} \\ \text{在 } (-\infty, 0] \text{ 上有 } u_0(x) \geq \theta_0, \text{ 在 } \infty \text{ 远处有 } u_0(x) \sim e^{-\lambda_u x}, \\ \text{在 } -\infty \text{ 远处有 } v_0(x) \sim e^{\lambda_v^- x}, \text{ 在 } \infty \text{ 远处有 } v_0(x) \sim e^{-\lambda_v^+ x}. \end{array} \right.$$

标记

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = d(\lambda_v^+ \wedge \sqrt{\frac{r}{d}}) + \frac{r}{\lambda_v^+ \wedge \sqrt{\frac{r}{d}}}, \quad \sigma_2 = (\lambda_u \wedge 1) + \frac{1}{\lambda_u \wedge 1}, \\ \sigma_3 = d(\lambda_v^- \wedge \sqrt{\frac{r(1-b)}{d}}) + \frac{r(1-b)}{\lambda_v^- \wedge \sqrt{\frac{r(1-b)}{d}}}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

其中对于任意 $a, b \in \mathbb{R}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$. 这里 σ_1 (σ_2) 表示缺乏竞争者的情形下 v (u) 的传播速度 [65, 79]. 不失一般性, 假设通篇有 $\sigma_1 \geq \sigma_2$. 这就表明了 v 为传播较快的物种.

3.1.2 主要结果

本章的主要结果叙述如下:

定理 3.1 假设 $\sigma_1 > \sigma_2$. (u, v) 是 (1.2) 的解且其初值满足 (H_λ) . 那么存在 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ 使得 $c_3 < 0 < c_2 < c_1$, 且对每一小的 $\eta > 0$, 下列的传播性质成立:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (c_1 + \eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_2 + \eta)t < x < (c_1 - \eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x) - 1|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_3 + \eta)t < x < (c_2 - \eta)t} (|u(t, x) - k_1| + |v(t, x) - k_2|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < (c_3 - \eta)t} (|u(t, x) - 1| + |v(t, x)|) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

准确地说, 传播速度 $c_3 < 0 < c_2 < c_1$ 能由以下决定:

$$c_1 = \sigma_1, \quad c_2 = \max\{c_{\text{LLW}}, \hat{c}_{\text{nlp}}\}, \quad c_3 = -\max\{\tilde{c}_{\text{LLW}}, \sigma_3\}, \quad (3.3)$$

其中 c_{LLW} (\tilde{c}_{LLW}) 是定理 1.1 (注记 1.1) 从 (k_1, k_2) 到 $(0, 1)$ ((k_1, k_2) 到 $(1, 0)$) 给定的传播速度, 且

$$\hat{c}_{\text{nlp}} = \begin{cases} \frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{2-\sqrt{a}}, & \sigma_1 < 2\lambda_u, \quad \sigma_1 \leq 2(\sqrt{a} + \sqrt{1-a}), \\ \tilde{\lambda}_{\text{nlp}} + \frac{1-a}{\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}}, & \sigma_1 \geq 2\lambda_u, \quad \tilde{\lambda}_{\text{nlp}} \leq \sqrt{1-a}, \\ 2\sqrt{1-a}, & \text{其它}, \end{cases} \quad (3.4)$$

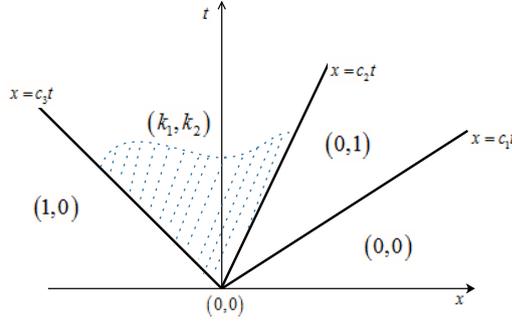
其中 $\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}$ 给定为

$$\tilde{\lambda}_{\text{nlp}} = \frac{1}{2} \left[\sigma_1 - \sqrt{(\sigma_1 - 2\lambda_u)^2 + 4a} \right]. \quad (3.5)$$

为了可视化传播性质 (3.2), 引入伸缩变换

$$(\hat{u}, \hat{v})(t, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u, v) \left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon} \right), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R},$$

他们的渐近行为可由图 3.1 给定.


 图 3.1 (\hat{u}, \hat{v}) 的渐近行为.

注意到较快物种 v 的传播速度 c_1 由 λ_v^+ (其是在 $x \approx \infty$ 上 v_0 的指数衰减率) 完全确定, 且完全不受较慢物种 u 的影响, 物种 u 的对应传播速度 c_2 依赖于 σ_1 和 λ_u (其是在 $x \approx \infty$ 上 u_0 的指数衰减率). 特别地, 当 $\lambda_v^+ \geq \sqrt{\frac{r}{d}}$ 和 $\lambda_u > \frac{\sigma_1}{2}$, 即, $v_0(x)$ 和 $u_0(x)$ 衰减足够快, 速度 c_1 和 c_2 和初值为紧支集时的情况相同 (参见第二章定理 2.1).

注记 3.1 指出在定理 3.1 中传播速度 c_2 关于 σ_1 和 λ_u 是非递增的, 其由下面的观察可得: (i) 由 (3.5) 给定的 $\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}$ 关于 σ_1 和 λ_u 是非递减的; (ii) $s + \frac{1-a}{s}$ 在 $(0, \sqrt{1-a}]$ 内非递增的. 这个事实能得到以下几个直观感想: (i) σ_1 越大意味着被物种 v 占的领域 $\{(t, x) : c_2 t < x < \sigma_1 t\}$ 越大, 因此 u 更难去入侵 v ; (ii) λ_u 越大就意味着越少的数量在波前拉入侵波, 其也使物种 u 更难入侵 v .

固定 $\sigma_1, \lambda_u > 0$ 和 $0 < a < 1$, 使得 $\sigma_1 > \sigma_2$ 成立. 可知 (3.4) 中的 \hat{c}_{nlp} 的量级能够被表示为

$$\{(t, x) : \bar{w}_2(t, x) = 0\} = \{(t, x) : t > 0, x \leq \hat{c}_{\text{nlp}} t\},$$

其中 $\bar{w}_2(t, x)$ 是 Hamilton-Jacobi 方程

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + |\partial_x w|^2 + 1 - a\chi_{\{x < \sigma_1 t\}}, w\} = 0, & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w(0, x) = \lambda_u \max\{x, 0\}, & \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.6)$$

的唯一粘性解. 这里 χ_S 是集合 $S \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ 的指示性函数.

更进一步感兴趣的点在 (1.2) 里的共同入侵过程中 $(0, 0)$ 和 (k_1, k_2) 的演变, 其仅仅发生在弱竞争 $0 < a, b < 1$ 情形下. 在这种情况下, 平衡状态 $(0, 0)$ 和 (k_1, k_2) 是无序的, 因此由 Tang 和 Fife [92] 行波解的存在性不能通过由

Weinberger 等 [103] (也可参见 [41, 72]) 中的单调动力系统框架建立. 当 $\sigma_1 = \sigma_2$, 在无穷处初值满足指数衰减率 λ_u, λ_v^+ 的系统 (1.2) 中从 (k_1, k_2) 到 $(0, 0)$ 的入侵波是真实存在的.

定理 3.2 假设 $\sigma_1 = \sigma_2$. (u, v) 是 (1.2) 的解且初值满足 (H_λ) . 那么对每一个小的 $\eta > 0$, 有

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (\sigma_1 + \eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_3 + \eta)t < x < (\sigma_1 - \eta)t} (|u(t, x) - k_1| + |v(t, x) - k_2|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < (c_3 - \eta)t} (|u(t, x) - 1| + |v(t, x)|) = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

其中 $c_3 = -\max\{\tilde{c}_{LLW}, \sigma_3\}$ 和 \tilde{c}_{LLW} 由注记 1.1 给定.

对于指数衰减率的初值, 定理 3.1 表明有两个分开的单调的波其每个物种都以不同的速度去入侵. 此外, 如果 (1.2) 的参数以 $|\sigma_1 - \sigma_2| \rightarrow 0$ 的方向改变, 两个波的距离将趋于零. 因此, (k_1, k_2) 的入侵波直接侵入 $(0, 0)$, 由 Tang 和 Fife, 这是两个单调的波重合的特殊情形 (定理 3.2).

注记 3.2 如 [38] 和第二章, 此方法通过小的修改可应用在更高维的竞争物种的传播问题上. 然而, 我们选择集中在在一维的情形去保持阐述简单, 且接近在 [89, 第 7 章] 中公式猜想.

3.1.3 主要思想的大纲

为了确定 c_1, c_2, c_3 , 我们介绍解的渐近估计和对特定的 Hamilton-Jacobi 方程构造合适的粘性上-下解, 然后利用定理 3.5 去得到期望的估计. 概述定理 3.1 里的非局部传播速度 c_2 主要步骤, 且注意 c_1, c_3 能由 c_2 相似甚至更简单的证明得到.

1. c_2 的下界估计, 我们考虑转换 $w_2^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log u\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right)$ 和证明半放松极限

$$w_{2,*}(t, x) = \liminf_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w_2^\epsilon(t', x'), \quad w_2^*(t, x) = \limsup_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w_2^\epsilon(t', x')$$

存在, 基于在 C_{loc} 上建立了一致有界性 (参见引理 3.2). 通过构造粘性上解 \bar{w}_2 , 其满足

$$\{(t, x) : \bar{w}_2(t, x) = 0\} = \{(t, x) : t > 0, x \leq \hat{c}_{nlp}t\},$$

再利用定理 3.5, 我们可证明 $w_2^* \leq \bar{w}_2$, 从而可得在 $\{(t, x) : x < \hat{c}_{\text{nlp}}t\}$ 内局部一致地 $w_2^\epsilon \rightarrow 0$. 之后可以再利用 [38, 第 4 节] 的证明去证

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} u\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right) > 0, \quad \{(t, x) : t > 0, x < \hat{c}_{\text{nlp}}t\}.$$

这意味着 $c_2 \geq \hat{c}_{\text{nlp}}$ (参见引理 3.6).

2. c_2 的上界估计, 参见命题 3.2, 我们构造粘性下解 \underline{w}_2 和应用定理 3.5 估计 w_2 的下界. 这可得到关于 u 的渐近行为. 换句话说, 对每一个小的 $\delta > 0$, 记 $\hat{c}_\delta = \sigma_1 - \delta$, 有

$$u(t, \hat{c}_\delta t) \leq \exp(-[\hat{\mu}_\delta + o(1)]t), \quad t \gg 1,$$

其中 $\hat{\mu}_\delta = \underline{w}_2(1, \hat{c}_\delta) = \underline{w}_2(1, \sigma_1 - \delta)$. 可知 (u, v) 是 (1.2) 在 $\{(t, x) : 0 \leq x \leq \hat{c}_\delta t\}$ 的解, 其边界条件满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v)(t, 0) = (k_1, k_2), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (u, v)(t, \hat{c}_\delta t) = (0, 1),$$

我们可应用第二章里的引理 2.2 去证明 \hat{c}_δ 和 $\hat{\mu}_\delta$ 能估计 u 的传播速度 c_2 的上界.

本章的剩下的部分组织如下: 3.2 节, 给出对于 $i = 1, 2, 3$, c_i 和 $c_2 \geq c_{\text{LLW}}$ 的上界估计. 3.3 节, 给出 c_1, c_2 的下界估计. 3.4 节建立 u 和 v 的近似渐近表达式且其中也决定了 c_2, c_3 . 3.5 节, 讨论了本章的结果与 Tang 和 Fife [92] 的入侵模式之间的关系. 3.6 节, 讨论了本章的结果与 Girardin 和 Lam [47] 的结果之间的关系. 3.7 节, 证明与三物种竞争扩散系统的传播速度相关的一个拓展. 3.8 节给出了带有分段 Lipschitz 连续的 Hamiltonian 的 Hamilton-Jacobi 方程的比较原理.

本章继续研究了双物种竞争扩散方程组的柯西问题. 对于两个物种向空白栖息地的传播, 请参见积微分竞争模型 [70], 和自由边界竞争模型 [30, 105]. 关于自由边界问题的其他相关结果, 请参见文献 [48, 75, 98, 99, 104]. 我们还注意到, 在这些工作中, 传播速度总是由局部决定的, 因此不会相互影响.

3.2 最大和最小的速度的估计

在这节, 初值满足 (H_λ) , 我们给出一些关于最大和最小的传播速度的估计. 这节的主要结果如下.

命题 3.1 假设 (u, v) 是 (1.2) 的解其初值满足 (H_λ) . 那么定义在 (2.10) 的传播速度满足

(i) 对于 $i = 1, 2$ 有 $\bar{c}_i \leq \sigma_i$, 和 $\bar{c}_3 \leq -\sigma_3$;

(ii) $c_2 \geq c_{LLW}$, 和 $\bar{c}_3 \leq -\tilde{c}_{LLW}$,

其中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 定义在 (3.1) 和 c_{LLW}, \tilde{c}_{LLW} 是分别由定理 1.1 和注记 1.1 给定的. 此外, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (|u(t, 0) - k_1| + |v(t, 0) - k_2|) = 0. \quad (3.8)$$

证明. 我们将会按下列的顺序完成证明: (1) $\bar{c}_2 \leq \sigma_2$, (2) $\bar{c}_1 \leq \sigma_1$, (3) $\bar{c}_3 \leq -\sigma_3$, (4) $\bar{c}_3 \leq -\tilde{c}_{LLW}$, (5) $c_2 \geq c_{LLW}$, (6) (3.8) 成立.

步骤 1. 证明 (1), (2) 和 (3).

对某 $M > 0$ 注意到函数

$$\bar{u}(t, x) := \min\{1, M \exp(-\min\{\lambda_u, 1\}(x - \sigma_2 t))\}$$

是单个 KPP 方程

$$\partial_t \bar{u} - \partial_{xx} \bar{u} = \bar{u}(1 - \bar{u}), \quad (0, \infty) \times \mathbb{R},$$

的弱上解且 $u(t, x)$ 显然是它的下解. 通过选择常数 $M > 0$ 足够大使得在 \mathbb{R} 上有 $u_0(x) \leq \bar{u}(0, x)$, 对 $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, 通过比较原理有

$$u(t, x) \leq \bar{u}(t, x) = \min\{1, M \exp(-\min\{\lambda_u, 1\}(x - \sigma_2 t))\}. \quad (3.9)$$

尤其, 对每一个 $\eta > 0$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (\sigma_2 + \eta)t} |u(t, x)| = 0. \quad (3.10)$$

这证明了 $\bar{c}_2 \leq \sigma_2$, 即, (1) 成立.

类似地, 通过与

$$\bar{v}(t, x) := \min\{1, M \exp(-\min\{\lambda_v^+, \sqrt{r/d}\}(x - \sigma_1 t))\}$$

是

$$\begin{cases} \partial_t \bar{v} - d \partial_{xx} \bar{v} = r \bar{v}(1 - \bar{v}), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \bar{v}(0, x) = \min(1, M e^{-\min\{\lambda_v^+, \sqrt{r/d}\}x}), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

的解, 进行比较我们推出 (2).

证明 (3), 记 $\tilde{v}(t, x) = v(t, -x)$, 我们考虑另一个 KPP 方程

$$\begin{cases} \partial_t \underline{v} - d \partial_{xx} \underline{v} = r \underline{v} (1 - b - \underline{v}), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \underline{v}(0, x) = v_0(-x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

再次使用比较原理表明 $v(t, -x) = \tilde{v}(t, x) \geq \underline{v}$. 由 [65] 或者 [79] 的结果, 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{(-\sigma_3 + \eta)t < x \leq 0} v \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{|x| < (\sigma_3 - \eta)t} \tilde{v} \geq \frac{1-b}{2}, \quad (3.11)$$

其表明 $\bar{c}_3 \leq -\sigma_3$.

步骤 2. 证明 (4) 和 (5).

给定任意非平凡的, 紧子集函数 \tilde{v}_0 使得 $0 \leq \tilde{v}_0 \leq v_0$. 那么

$$(u_0(x), v_0(x)) \preceq (1, \tilde{v}_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$(\tilde{u}_{LLW}, \tilde{v}_{LLW})$ 是 (1.2) 的解且初值为 $(1, \tilde{v}_0(x))$. 那么定理 1.1 和注记 1.1 保证了 $\tilde{c}_{LLW} \geq 2\sqrt{dr(1-b)}$, 使得对每一个 $c \in (-\tilde{c}_{LLW}, 0)$, 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{|x| < |c|t} \tilde{v}_{LLW}(t, x) > 0.$$

对 (1.2) 使用比较原理, 对所有 $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, 有 $(u, v) \preceq (\tilde{u}_{LLW}, \tilde{v}_{LLW})$, 对每一个 $c \in (-\tilde{c}_{LLW}, 0)$, 其满足,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{ct < x < ct+1} v(t, x) \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{ct < x < ct+1} \tilde{v}_{LLW}(t, x) > 0.$$

这证明 $\bar{c}_3 \leq -\tilde{c}_{LLW}$ 和 (4) 成立.

相似地, 证明 (5), 即 $\underline{c}_2 \geq c_{LLW}$. 对某些紧支集 \tilde{u}_0 满足 $0 \leq \tilde{u}_0 \leq u_0$, 通过 (u, v) 与 (1.2) 满足初值 $(\tilde{u}_0, 1)$ 的解 (u_{LLW}, v_{LLW}) 比较, 然后使用定理 1.1. 用这个方法, 我们推出对每一个 $c \in (0, c_{LLW})$, 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{|x| < ct} u \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{|x| < ct} u_{LLW} > 0. \quad (3.12)$$

步骤 3. 证明 (6). 鉴于 (3.11) 和 (3.12), 通过引理 2.1 的 (a) 和 (c) 我们可推出 (3.8). \square

3.3 c_1 和 c_2 的下界估计

本节假设 $\sigma_1 > \sigma_2$. 在这节里, 我们通过渐近估计和定理 3.5 估计 c_1 和 c_2 的下界. 为此, 我们通过引入小的参数 ϵ :

$$u^\epsilon(t, x) = u\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right), \quad v^\epsilon(t, x) = v\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right). \quad (3.13)$$

在新的尺度下, 我们将 (1.2) 的 u^ϵ 和 v^ϵ 方程重写如下

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon = \epsilon \partial_{xx} u^\epsilon + \frac{u^\epsilon}{\epsilon} (1 - u^\epsilon - av^\epsilon), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t v^\epsilon = \epsilon d \partial_{xx} v^\epsilon + r \frac{v^\epsilon}{\epsilon} (1 - bu^\epsilon - v^\epsilon), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u^\epsilon(0, x) = u_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right), & \mathbb{R}, \\ v^\epsilon(0, x) = v_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right), & \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.14)$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 为了获得 v^ϵ 和 u^ϵ 的渐近行为, 思路是考虑 WKB 变换 w_1^ϵ 和 w_2^ϵ , 其分别由以下给定

$$w_1^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log v^\epsilon(t, x), \quad w_2^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log u^\epsilon(t, x), \quad (3.15)$$

且分别满足方程

$$\begin{cases} \partial_t w^\epsilon - \epsilon d \partial_{xx} w^\epsilon + d |\partial_x w^\epsilon|^2 + r(1 - bu^\epsilon - v^\epsilon) = 0, & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w^\epsilon(0, x) = -\epsilon \log v^\epsilon(0, x), & \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.16)$$

和

$$\begin{cases} \partial_t w^\epsilon - \epsilon \partial_{xx} w^\epsilon + |\partial_x w^\epsilon|^2 + 1 - u^\epsilon - av^\epsilon = 0, & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w^\epsilon(0, x) = -\epsilon \log u^\epsilon(0, x), & \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.17)$$

引理 3.1 假设 G 在 $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上是开集且 K, K' 是紧支集使得 $K \subset \text{Int } K' \subset K' \subset G$.

(a) 如当 $\epsilon \rightarrow 0$ 在 K' 上一致地有 $w_2^\epsilon \rightarrow 0$, 那么

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K u^\epsilon \geq 1 - a \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{K'} v^\epsilon; \quad (3.18)$$

(b) 如当 $\epsilon \rightarrow 0$ 在 K' 上一致地有 $w_1^\epsilon \rightarrow 0$, 那么

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K v^\epsilon \geq 1 - b \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{K'} u^\epsilon. \quad (3.19)$$

证明. 利用 [38, 第 4 节] 的证明我们推出 (a). K , K' 和 G 由上面给定.

固定任意 $(t_0, x_0) \in K$ 和定义试验函数

$$\rho(t, x) = |x - x_0|^2 + (t - t_0)^2.$$

因为 (i) $(t_0, x_0) \in K \subset \text{Int } K'$ 和 (ii) 在 K' 上一致地有 $w_2^\epsilon \rightarrow 0$, 在 K' 内函数 $w_2^\epsilon - \rho$ 在 $(t_\epsilon, x_\epsilon) \in \text{Int } K'$ 点达到全局最大值且当 $\epsilon \rightarrow 0$ 有 $(t_\epsilon, x_\epsilon) \rightarrow (t_0, x_0)$. 此外, $\partial_t \rho(t_\epsilon, x_\epsilon), \partial_x \rho(t_\epsilon, x_\epsilon) \rightarrow 0$, 所以在点 (t_ϵ, x_ϵ) , 有

$$o(1) = \partial_t \rho - \epsilon \partial_{xx} \rho + |\partial_x \rho|^2 \leq \partial_t w_2^\epsilon - \epsilon \partial_{xx} w_2^\epsilon + |\partial_x w_2^\epsilon|^2 \leq u^\epsilon - 1 + a \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{K'} v^\epsilon.$$

这满足

$$u^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon) \geq 1 - a \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{K'} v^\epsilon + o(1).$$

因为在 K' 上 $w_2^\epsilon - \rho$ 在 (t_ϵ, x_ϵ) 点达到最大值, 特别地有

$$w_2^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon) \geq (w_2^\epsilon - \rho)(t_\epsilon, x_\epsilon) \geq (w_2^\epsilon - \rho)(t_0, x_0) = w_2^\epsilon(t_0, x_0).$$

可知 $u^\epsilon(t_0, x_0) = e^{-\epsilon w_2^\epsilon(t_0, x_0)}$ 和 $u^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon) = e^{-\epsilon w_2^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon)}$, 因此有

$$u^\epsilon(t_0, x_0) \geq u^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon) \geq 1 - a \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{K'} v^\epsilon + o(1).$$

因为对 $(t_0, x_0) \in K$ 这个证明是一致的 (仅依赖于 K , K' 和 G), 我们推出 (a). 对 (b) 的证明是类似的. \square

定义

$$w_1^*(t, x) = \limsup_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w_1^\epsilon(t', x'),$$

$$w_2^*(t, x) = \limsup_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w_2^\epsilon(t', x'), \quad w_{2,*}(t, x) = \liminf_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w_2^\epsilon(t', x').$$

上面是好的定义是由于下面的引理:

引理 3.2 假设 w_1^ϵ 和 w_2^ϵ 分别是 (3.16) 和 (3.17) 的解. 那么存在某 $Q > 0$, 与小的 ϵ 无关, 使得对 $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ 有

$$\max\{\lambda_v^+ x_+ + \lambda_v^- x_- - Q(t + \epsilon), 0\} \leq w_1^\epsilon(t, x) \leq \lambda_v^+ x_+ + \lambda_v^- x_- + Q(t + \epsilon), \quad (3.20a)$$

$$\max\{\lambda_u x_+ - Q(t + \epsilon), 0\} \leq w_2^\epsilon(t, x) \leq \lambda_u x_+ + Q(t + \epsilon), \quad (3.20b)$$

$$0 \leq w_1^\epsilon(t, x) \leq Q(\lambda_v^+ x_+ + \lambda_v^- x_- + \epsilon), \quad (3.20c)$$

$$0 \leq w_2^\epsilon(t, x) \leq Q(\lambda_u x_+ + \epsilon), \quad (3.20d)$$

其中 $x_+ = \max\{x, 0\}$ 和 $x_- = \max\{-x, 0\}$.

证明. 这里仅证明 (3.20a) 而 (3.20b)-(3.20d) 的估计按照相似的证明可得. 因为 $v^\epsilon \leq 1$, 通过定义有 $w_1^\epsilon \geq 0$. 由 (H_λ) , 存在正的常数 C_1 和 C_2 使得

$$C_2 e^{-(\lambda_v^+ x_+ + \lambda_v^- x_-)} \leq v(0, x) \leq C_1 e^{-(\lambda_v^+ x_+ + \lambda_v^- x_-)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

通过 (3.15) 的定义, 有

$$\lambda_v^+ x_+ + \lambda_v^- x_- - \epsilon \log C_1 \leq w_1^\epsilon(0, x) \leq \lambda_v^+ x_+ + \lambda_v^- x_- - \epsilon \log C_2. \quad (3.21)$$

定义

$$\bar{z}_1^\epsilon(t, x) = \lambda_v^+ x + Q(t + \epsilon).$$

选择 ϵ 无关的足够大的 Q 使得

$$w_1^\epsilon(t, x) \leq \bar{z}_1^\epsilon(t, x), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times [0, \infty). \quad (3.22)$$

为此, 假设 $Q \geq r$ 在 $(0, \infty) \times (0, \infty)$ 上注意到 \bar{z}_1^ϵ 是 (3.16) 的 (经典) 上解. 由命题 3.1 的 (3.8), 我们发现 $-\log v(t, 0)$ 在 $[0, \infty)$ 上是一致有界的 (因为 \mathbb{R} 上 $v(0, x) > 0$), 所以选择

$$Q = \max \left\{ \sup_{t \in [0, \infty)} [-\log v(t, 0)], |\log C_2|, r \right\}, \quad (3.23)$$

使得

$$w_1^\epsilon(t, 0) \leq \bar{z}_1^\epsilon(t, 0) \quad t \geq 0, \quad w_1^\epsilon(0, x) \leq \bar{z}_1^\epsilon(0, x) \quad x \geq 0,$$

其中最后一个不等式是由于 (3.21). 通过比较, 因此 (3.22) 成立.

通过相似的证明, 可验证在 $(0, \infty) \times (-\infty, 0)$ 上

$$\bar{z}_2^\epsilon(t, x) = -\lambda_v^- x + Q(t + \epsilon)$$

是 (3.16) 上解, 所以

$$w_1^\epsilon(t, x) \leq \bar{z}_2^\epsilon(t, x), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times (-\infty, 0], \quad (3.24)$$

其中 Q 是定义在 (3.23). 与 (3.22) 和 (3.24) 综合在一起给出了 w_1^ϵ 的上界.

为了获得 w_1^ϵ 的下界, 定义函数

$$z_1^\epsilon(t, x) = \lambda_v^+ x - Q(t + \epsilon) \quad \text{和} \quad z_2^\epsilon(t, x) = -\lambda_v^+ x - Q(t + \epsilon).$$

通过和之前相同的证明, 可验证

$$w_1^\epsilon(t, x) \geq z_1^\epsilon(t, x), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \quad \text{和} \quad w_1^\epsilon(t, x) \geq z_2^\epsilon(t, x) \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R},$$

通过选择 $Q = \max\{|\log C_1|, d(\lambda_v^+)^2 + d(\lambda_v^-)^2 + r\}$. 这完成了 (3.20a) 的证明. \square

注记 3.3 根据引理 3.2, 让 $t = 0$ 然后对 (3.20a) 和 (3.20b) 中 $\epsilon \rightarrow 0$, 我们推出

$$w_1^*(0, x) = \begin{cases} \lambda_v^+ x, & x \in [0, \infty), \\ \lambda_v^- x, & x \in (-\infty, 0], \end{cases}$$

和

$$w_2^*(0, x) = w_{2,*}(0, x) = \begin{cases} \lambda_u x, & x \in [0, \infty), \\ 0, & x \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

相似地, 让 $x = 0$ 和在 (3.20c) 和 (3.20d) 中 $\epsilon \rightarrow 0$, 有

$$w_1^*(t, 0) = w_2^*(t, 0) = w_{2,*}(t, 0) = 0, \quad t \geq 0.$$

3.3.1 c_1 的下界估计

由命题 3.1, 有 $\bar{c}_2 \leq \sigma_2$, 因此我们推出

$$0 \leq \limsup_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} u^\epsilon(t', x') \leq \chi_{\{x \leq \sigma_2 t\}}. \quad (3.25)$$

引理 3.3 假设 (u, v) 是 (1.2) 的解其初值满足 (H_λ) . 那么

(a) w_1^* 是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + d|\partial_x w|^2 + r(1 - b\chi_{\{x \leq \sigma_2 t\}}), w\} = 0, & (0, \infty) \times (0, \infty), \\ w(0, x) = \lambda_v^+ x, & [0, \infty), \\ w(t, 0) = 0, & [0, \infty), \end{cases} \quad (3.26)$$

的粘性下解;

(b) w_1^* 是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + d|\partial_x w|^2 + r(1 - b\chi_{\{x \leq \sigma_2 t\}}), w\} = 0, & (0, \infty) \times (-\infty, 0), \\ w(0, x) = -\lambda_v^- x, & (-\infty, 0], \\ w(t, 0) = 0, & [0, \infty), \end{cases} \quad (3.27)$$

的粘性下解, 其中 σ_2 由 (3.1) 定义和 $\lambda_v^-, \lambda_v^+ \in (0, \infty)$ 由 (H_λ) 给定.

证明. 首先, 注意到 w_1^* 是上半连续的. 由注记 3.3, (3.26) 和 (3.27) 可知初边值条件满足.

仍需证明 w_1^* 在 $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 是 $\min\{\partial_t w + d|\partial_x w|^2 + r(1 - b\chi_{\{x \leq \sigma_2 t\}}), w\} = 0$ 的粘性下解. 由 Hamilton-Jacobi 方程粘性下解的定义 (参见节 3.8), 让 $\varphi \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ 和 (t_0, x_0) 是 $w_1^* - \varphi$ 一个严格的局部的极大值点且有 $w_1^*(t_0, x_0) > 0$. 如需必要取一子序列 $\epsilon = \epsilon_k$, $w_1^\epsilon - \varphi$ 在 (t_ϵ, x_ϵ) 有一个局部的极大值点且当 $\epsilon \rightarrow 0$ 一致地有 $w_1^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon) \rightarrow w_1^*(t_0, x_0)$ 和 $(t_\epsilon, x_\epsilon) \rightarrow (t_0, x_0)$. 在点 (t_ϵ, x_ϵ) 上, 有

$$\begin{aligned} \epsilon d \partial_{xx} \varphi &\geq \epsilon d \partial_{xx} w_1^\epsilon = \partial_t w_1^\epsilon + d|\partial_x w_1^\epsilon|^2 + r(1 - bu^\epsilon - e^{-\frac{w_1^\epsilon}{\epsilon}}) \\ &= \partial_t \varphi + d|\partial_x \varphi|^2 + r(1 - bu^\epsilon - e^{-\frac{w_1^\epsilon}{\epsilon}}). \end{aligned}$$

通过 $e^{-w_1^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon)/\epsilon} \rightarrow 0$ (因为 $w_1^\epsilon(t_\epsilon, x_\epsilon) \rightarrow w_1^*(t_0, x_0) > 0$) 的事实, 取极限 $\epsilon = \epsilon_k \rightarrow 0$ 所以有

$$0 \geq \partial_t \varphi(t_0, x_0) + d|\partial_x \varphi(t_0, x_0)|^2 + r(1 - b\chi_{\{(t,x): x \leq \sigma_2 t\}}(t_0, x_0) - 0).$$

因此 w_1^* 是 (3.26) 和 (3.27) 的粘性下解. □

引理 3.4 假设 (u, v) 是 (1.2) 的解其初值满足 (H_λ) . 那么

$$c_1 \geq \sigma_1,$$

其中 σ_1 是定义在 (3.1).

证明. 函数 $\bar{w}_1 : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 当 $\lambda_v^+ \leq \sqrt{\frac{r}{d}}$, 由

$$\bar{w}_1(t, x) = \begin{cases} \lambda_v^+(x - (d\lambda_v^+ + \frac{r}{\lambda_v^+})t), & \frac{x}{t} > d\lambda_v^+ + \frac{r}{\lambda_v^+}, \\ 0, & 0 \leq \frac{x}{t} \leq d\lambda_v^+ + \frac{r}{\lambda_v^+}, \end{cases}$$

定义, 而当 $\lambda_v^+ > \sqrt{\frac{r}{d}}$, 由

$$\bar{w}_1(t, x) = \begin{cases} \lambda_v^+(x - (d\lambda_v^+ + \frac{r}{\lambda_v^+})t), & \frac{x}{t} > 2d\lambda_v^+, \\ \frac{t}{4d}(\frac{x^2}{t^2} - 4dr), & 2\sqrt{dr} < \frac{x}{t} \leq 2d\lambda_v^+, \\ 0, & 0 \leq \frac{x}{t} \leq 2\sqrt{dr}, \end{cases}$$

定义.

通过构造, \bar{w}_1 在 $[0, \infty) \times [0, \infty)$ 上是连续的. 接下来, 称连续的 \bar{w}_1 是 (3.26) 的粘性上解. 我们将会验证后一种情形 $\lambda_v^+ > \sqrt{\frac{r}{d}}$, 前一种的情形能相似地验证. 对 $\lambda_v^+ > \sqrt{\frac{r}{d}}$ 情形, 有 $\sigma_1 = 2\sqrt{dr}$. 根据 Hamilton-Jacobi 方程的粘性上解的定义 (参见节 3.8), 让 $\varphi \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ 和 (t_0, x_0) 是 $\bar{w}_1 - \varphi$ 的严格的局部极小值点.

如果 $x_0/t_0 \neq 2\sqrt{dr}$, 那么 \bar{w}_1 是 (3.26) 的经典解.

如果 $x_0/t_0 = 2\sqrt{dr}$, 那么由定义 $\bar{w}_1(t_0, x_0) = 0$. 此外,

$$-\varphi(t, 2\sqrt{dr}t) = (\bar{w}_1 - \varphi)(t, 2\sqrt{dr}t) \geq (\bar{w}_1 - \varphi)(t_0, x_0) = -\varphi(t_0, x_0), \quad t \approx t_0,$$

且有 $\partial_t \varphi(t_0, x_0) + 2\sqrt{dr} \partial_x \varphi(t_0, x_0) = 0$, 因此

$$\begin{aligned} & \partial_t \varphi(t_0, x_0) + d|\partial_x \varphi(t_0, x_0)|^2 + r(1 - b\chi_{\{(t, x): x \leq \sigma_2 t\}}(t_0, x_0)) \\ &= -2\sqrt{dr} \partial_x \varphi(t_0, x_0) + d|\partial_x \varphi(t_0, x_0)|^2 + r \\ &= \left(\sqrt{d} \partial_x \varphi(t_0, x_0) - \sqrt{r} \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

其中第一个等式由于 $x_0/t_0 = 2\sqrt{dr} = \sigma_1 > \sigma_2$ 的事实.

由注记 3.3 和 \bar{w}_1 的表达式, 有

$$\bar{w}_1(t, x) = \lambda_v^+ x = w_1^*(t, x), \quad \partial[(0, \infty) \times (0, \infty)].$$

由引理 3.3(a) 可知 \bar{w}_1 和 w_1^* 是 (3.26) 一对粘性上-下解. 那么, 应用定理 3.5 我们得到

$$0 \leq w_1^* \leq \bar{w}_1 \quad [0, \infty) \times [0, \infty),$$

其表明

$$\{(t, x) : w_1^*(t, x) = 0\} \supset \{(t, x) : \bar{w}_1(t, x) = 0\} = \{(t, x) : 0 \leq x \leq \sigma_1 t\}.$$

让 $\epsilon \rightarrow 0$, 我们得到

$$w_1^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log v^\epsilon(t, x) \rightarrow 0 \text{ 局部一致地 } \{(t, x) : 0 \leq x < \sigma_1 t\}.$$

因此对每一个小的 $\eta > 0$, 通过选择紧集 $K = \{(1, x) : \eta \leq x \leq \sigma_1 - \eta\}$ 和 $K' = \{(1, x) : \frac{\eta}{2} \leq x \leq \sigma_1 - \frac{\eta}{2}\}$, 由引理 3.1(b) 我们推出

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{\eta t < x < (\sigma_1 - \eta)t} v(t, x) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K v^\epsilon(t, x) \geq \frac{1-b}{2} > 0. \quad (3.28)$$

这表明 $\underline{c}_1 \geq \sigma_1$. □

推论 3.1 假设 (u, v) 是 (1.2) 的解其初值满足 (H_λ) . 那么对每一个小的 $\eta > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (\sigma_1 + \eta)t} (|u| + |v|) = 0, \quad (3.29a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\bar{c}_2 + \eta)t < x < (\sigma_1 - \eta)t} (|u| + |v - 1|) = 0, \quad (3.29b)$$

其中 σ_1 由 (3.1) 定义.

证明. 由定义可知, $\underline{c}_1 \leq \bar{c}_1$. 由命题 3.1 和引理 3.4 可知 $\sigma_1 \leq \underline{c}_1 \leq \bar{c}_1 \leq \sigma_1$. 因此, $\underline{c}_1 = \bar{c}_1 = \sigma_1$. 由命题 3.1(i), $\bar{c}_2 \leq \sigma_2 < \sigma_1$, 所以 (3.29a) 成立. 鉴于 (3.28) 和 \bar{c}_2 的定义, 对每一个小的 $\eta > 0$, 有,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{\eta t < x < (\sigma_1 - \eta)t} v(t, x) > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (\bar{c}_2 + \eta)t} u = 0.$$

利用引理 2.1(d) 我们推出 (3.29b). □

3.3.2 c_2 的下界估计

由推论 3.1, 有

$$\chi_{\{\sigma_2 t < x < \sigma_1 t\}} \leq \liminf_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} v^\epsilon(t', x') \leq \limsup_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} v^\epsilon(t', x') \leq \chi_{\{x \leq \sigma_1 t\}}. \quad (3.30)$$

引理 3.5 假设 (u, v) 是 (1.2) 的解其初值满足 (H_λ) . 那么, w_2^* 是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + |\partial_x w|^2 + 1 - a\chi_{\{x \leq \sigma_1 t\}}, w\} = 0, & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w(0, x) = \lambda_u \max\{x, 0\}, & \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.31)$$

的粘性下解, 其中 σ_1 由 (3.1) 定义和 $\lambda_u > 0$ 由 (H_λ) 给定.

证明. 证明与引理 3.3 的证明类似因此这里忽略细节. \square

引理 3.6 (u, v) 是 (1.2) 的解其初值满足 (H_λ) . 那么

$$c_2 \geq \hat{c}_{\text{nlp}},$$

其中 \hat{c}_{nlp} 是定义在定理 3.1.

证明. 根据在定理 3.1 里 \hat{c}_{nlp} 的定义, 我们分别考虑三种情况: (a) $\sigma_1 < 2\lambda_u$ 和 $\sigma_1 < 2(\sqrt{a} + \sqrt{1-a})$; (b) $\sigma_1 \geq 2\lambda_u$ 和 $\tilde{\lambda}_{\text{nlp}} \leq \sqrt{1-a}$; (c) 其他.

首先, 对于 (c) 情形已完成. 因为在这种情况下 $\hat{c}_{\text{nlp}} = 2\sqrt{1-a}$, 且, 根据命题 3.1(ii), $c_2 \geq c_{\text{LLW}}$, 又由定理 1.1 有 $c_{\text{LLW}} \geq 2\sqrt{1-a}$. 因此

$$c_2 \geq c_{\text{LLW}} \geq 2\sqrt{1-a} = \hat{c}_{\text{nlp}}.$$

仍需考虑 (a) 和 (b). 定义

$$\bar{c}_{\text{nlp}} = \frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{\frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a}}$$

和

$$\tilde{c}_{\text{nlp}} = \tilde{\lambda}_{\text{nlp}} + \frac{1-a}{\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}}, \quad \text{其中 } \tilde{\lambda}_{\text{nlp}} = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \sqrt{(\sigma_1 - 2\lambda_u)^2 + 4a} \right). \quad (3.32)$$

假设 (a) 成立, 那么 $\hat{c}_{\text{nlp}} = \bar{c}_{\text{nlp}}$. 定义 \bar{w}_2 由以下给定

$$\bar{w}_2(t, x) = \begin{cases} \lambda_u(x - (\lambda_u + \frac{1}{\lambda_u})t), & \frac{x}{t} \geq 2\lambda_u, \\ \frac{t}{4}(\frac{x^2}{t^2} - 4), & \sigma_1 \leq \frac{x}{t} < 2\lambda_u, \\ (\frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a})(x - \bar{c}_{\text{nlp}}t), & \bar{c}_{\text{nlp}} < \frac{x}{t} < \sigma_1, \\ 0, & \frac{x}{t} \leq \bar{c}_{\text{nlp}}. \end{cases}$$

通过定义, \bar{w}_2 在 $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上是连续的. 我们验证连续 \bar{w}_2 是 (3.31) 的粘性上解. (实际上, 它是 (3.31) 的唯一的粘性解, 但是我们不需要此事实.) 特别地, 当 $\frac{x}{t} \notin \{\sigma_1, \bar{c}_{\text{nlp}}\}$ 时 \bar{w}_2 是 (3.31) 的经典解. 仍需考虑当 $\frac{x_0}{t_0} = \sigma_1$ 或 \bar{c}_{nlp} 时, 对 $\forall \varphi \in C^\infty(0, \infty) \times \mathbb{R}$, $\bar{w}_2 - \varphi$ 在 (t_0, x_0) 上取到一个严格的局部最小值的情况. 当 $\frac{x_0}{t_0} = \sigma_1$, 对所有的 $t \approx t_0$ 有 $(\bar{w}_2 - \varphi)(t, \sigma_1 t) \geq (\bar{w}_2 - \varphi)(t_0, x_0)$, 所以 $\partial_t \varphi(t_0, x_0) + \sigma_1 \partial_x \varphi(t_0, x_0) = \frac{\sigma_1^2}{4} - 1$. 因此, 在 (t_0, x_0) , (注意 $(-a\chi_{\{x \leq \sigma_1 t\}})^* = -a\chi_{\{x < \sigma_1 t\}}$)

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi + |\partial_x \varphi|^2 + 1 - a\chi_{\{x < \sigma_1 t\}} &= \frac{\sigma_1^2}{4} - 1 - \sigma_1 \partial_x \varphi + |\partial_x \varphi|^2 + 1 \\ &= \left(\partial_x \varphi - \frac{\sigma_1}{2} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

另一方面, 如果 $\frac{x_0}{t_0} = \bar{c}_{\text{nlp}}$, 那么 $\nabla \varphi(t_0, x_0) \cdot (1, \bar{c}_{\text{nlp}}) = 0$, 和

$$0 \leq \nabla \varphi(t_0, x_0) \cdot (-\bar{c}_{\text{nlp}}, 1) \leq \nabla [(\frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a})(x - \bar{c}_{\text{nlp}}t)] \cdot (-\bar{c}_{\text{nlp}}, 1),$$

这意味着 $\partial_t \varphi(t_0, x_0) = -\bar{c}_{\text{nlp}} \partial_x \varphi$ 和 $0 \leq \partial_x \varphi(t_0, x_0) \leq \frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a}$, 因此在 (t_0, x_0)

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi + |\partial_x \varphi|^2 + 1 - a\chi_{\{x < \sigma_1 t\}} &= -\bar{c}_{\text{nlp}} \partial_x \varphi + |\partial_x \varphi|^2 + 1 - a \\ &= \left(\partial_x \varphi - \frac{1-a}{\frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a}} \right) \left(\partial_x \varphi - \frac{\sigma_1}{2} + \sqrt{a} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

最后一个不等式成立是因为 $\partial_x \varphi \leq \frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a} \leq \sqrt{1-a} \leq \frac{1-a}{\frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a}}$. 因此, \bar{w}_2 是 (3.31) 的粘性上解.

由注记 3.3 和 \bar{w}_2 的表达式, 有

$$\bar{w}_2(0, x) = \lambda_u \max\{x, 0\} = w_2^*(0, x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

并可知 w_2^* 是 (3.31) 的粘性下解, 可由定理 3.5 我们推出

$$0 \leq w_2^*(t, x) \leq \bar{w}_2(t, x), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (3.33)$$

现在,

$$\{(t, x) : w_2^*(t, x) = 0\} \supset \{(t, x) : \bar{w}_2(t, x) = 0\} = \{(t, x) : x \leq \hat{c}_{\text{nlp}}t\}.$$

因此,

$$w_2^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log u^\epsilon(t, x) \rightarrow 0, \quad \text{局部一致地于 } \{(t, x) : x < \hat{c}_{\text{nlp}}t\}.$$

因此对每一个小的 $\eta > 0$, 通过选择紧集 $K = \{(1, x) : \eta \leq x \leq \hat{c}_{\text{nlp}} - \eta\}$ 和 $K' = \{(1, x) : \frac{\eta}{2} \leq x \leq \hat{c}_{\text{nlp}} - \frac{\eta}{2}\}$, 可利用引理 3.1(a) 我们得到

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{\eta t \leq x \leq (\hat{c}_{\text{nlp}} - \eta)t} u(t, x) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K u^\epsilon(t, x) \geq \frac{1-a}{2} > 0,$$

其表明 $c_2 \geq \hat{c}_{\text{nlp}}$.

最后, 对于 (b) 情形, 那么有 $\hat{c}_{\text{nlp}} = \tilde{c}_{\text{nlp}}$. 定义

$$\bar{w}_2(t, x) = \begin{cases} \lambda_u(x - (\lambda_u + \frac{1}{\lambda_u})t), & \frac{x}{t} \geq \sigma_1, \\ \tilde{\lambda}_{\text{nlp}}(x - \tilde{c}_{\text{nlp}}t), & \tilde{c}_{\text{nlp}} < \frac{x}{t} < \sigma_1, \\ 0, & \frac{x}{t} \leq \tilde{c}_{\text{nlp}}. \end{cases}$$

那么 \bar{w}_2 是 (3.31) 的粘性上解, 所以 (a) 情形可以再次重复以上证明去得到 $c_2 \geq \hat{c}_{\text{nlp}}$. \square

3.4 \bar{c}_2 的上界估计和 c_3 的下界估计

这节假设 $\sigma_1 > \sigma_2$. 仍需证明

$$\bar{c}_2 \leq \max\{c_{\text{LLW}}, \hat{c}_{\text{nlp}}\}, \quad c_3 \geq -\max\{\tilde{c}_{\text{LLW}}, \sigma_3\}.$$

3.4.1 \bar{c}_2 的上界估计

对于 $\delta \geq 0$, 将会构造一个连续依赖 δ 的指数系数 $\hat{\mu}_\delta$ 使得

$$u(t, (\sigma_1 - \delta)t) \leq \exp(-(\hat{\mu}_\delta + o(1))t), \quad t \gg 1,$$

然后应用引理 2.2(a) 估计 \bar{c}_2 的上界.

引理 3.7 假设 (u, v) 是 (1.2) 的解其初值满足 (H_λ) . 那么 $w_{2,*}$ 是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + |\partial_x w|^2 + 1 - a\chi_{\{\sigma_2 t < x < \sigma_1 t\}}, w\} = 0, & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w(0, x) = \lambda_u \max\{x, 0\}, & \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.34)$$

的粘性上解, 其中 σ_1 和 σ_2 是定义在 (3.1).

证明. 正如引理 3.3 的标准证明一样, 此处忽略证明. \square

命题 3.2 (u, v) 是 (1.2) 的解其初值满足 (H_λ) . 那么

$$\bar{c}_2 \leq \max\{c_{\text{LLW}}, \hat{c}_{\text{nlp}}\},$$

其中 c_{LLW} 和 \hat{c}_{nlp} 分别由定理 1.1 和 3.1 定义.

证明. 步骤 1. $\underline{w}_2 : [0, \infty) \times \mathbb{R}$ 当 $\lambda_u > 1$, 由

$$\underline{w}_2(t, x) = \begin{cases} \lambda_u(x - (\lambda_u + \frac{1}{\lambda_u})t), & \frac{x}{t} \geq 2\lambda_u, \\ \frac{t}{4}(\frac{x^2}{t^2} - 4), & 2 \leq \frac{x}{t} < 2\lambda_u, \\ 0, & \frac{x}{t} < 2, \end{cases} \quad (3.35)$$

定义, 而当 $\lambda_u \leq 1$, 由

$$\underline{w}_2(t, x) = \lambda_u \max\left\{x - (\lambda_u + \frac{1}{\lambda_u})t, 0\right\},$$

定义. 那么可直接 \underline{w}_2 是 (3.34) 的粘性下解. 因为, 在 \mathbb{R} 上有 $w_{2,*}(0, x) = \lambda_u \max\{x, 0\} = \underline{w}_2(0, x)$ (由注记 3.3), 应用定理 3.5 推出

$$w_{2,*}(t, x) \geq \underline{w}_2(t, x), \quad [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (3.36)$$

步骤 2. 对每一个 $\hat{c} \geq 0$, 去证明

$$u(t, \hat{c}t) \leq \exp\{-(\underline{w}_2(1, \hat{c}) + o(1))t\}, \quad t \gg 1. \quad (3.37)$$

且 $\underline{w}_2(1, \sigma_1)$ 由

$$\underline{w}_2(1, \sigma_1) = \begin{cases} (\frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a})(\sigma_1 - \bar{c}_{\text{nlp}}), & \sigma_1 < 2\lambda_u, \\ \tilde{\lambda}_{\text{nlp}}(\sigma_1 - \tilde{c}_{\text{nlp}}), & \sigma_1 \geq 2\lambda_u, \end{cases} \quad (3.38)$$

给定, 和 $\bar{c}_{\text{nlp}}, \tilde{c}_{\text{nlp}}, \tilde{\lambda}_{\text{nlp}}$ 由引理 3.6 给定.

由 $w_{2,*}$ 和 $w_2^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log u^\epsilon(t, x)$ 的定义, 对每一个小的 $\epsilon > 0$, 通过应用步骤 1, 有

$$\begin{aligned} -\epsilon \log u \left(\frac{1}{\epsilon}, \frac{\hat{c}}{\epsilon} \right) &\geq w_{2,*}(1, \hat{c}) + o(1) \geq \underline{w}_2(1, \hat{c}) + o(1) \\ \iff u \left(\frac{1}{\epsilon}, \frac{\hat{c}}{\epsilon} \right) &\leq \exp \left(-\frac{\underline{w}_2(1, \hat{c}) + o(1)}{\epsilon} \right), \end{aligned}$$

其表明了 (3.37). 由 \underline{w}_2 的表达式, 可证明

(i) 对于 $\sigma_1 < 2\lambda_u$, 在 (3.35) 中替换 $(t, x) = (1, \sigma_1)$ 我们得到

$$\underline{w}_2(1, \sigma_1) = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - 4) = \left(\frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a} \right) (\sigma_1 - \bar{c}_{\text{nlp}}), \quad (3.39)$$

其中 $\bar{c}_{\text{nlp}} = \frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{\frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a}}$;

(ii) 对于 $\sigma_1 \geq 2\lambda_u$, 在 (3.35) 中替换 $(t, x) = (1, \sigma_1)$ 我们得到

$$\underline{w}_2(1, \sigma_1) = \lambda_u \left(\sigma_1 - \left(\lambda_u + \frac{1}{\lambda_u} \right) \right). \quad (3.40)$$

由 (3.32) 中 $\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}$ 的定义, 有

$$\tilde{\lambda}_{\text{nlp}} - \lambda_u = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - 2\lambda_u) - \sqrt{(\sigma_1 - 2\lambda_u)^2 + 4a} \right],$$

所以有

$$(\tilde{\lambda}_{\text{nlp}} - \lambda_u)^2 - (\sigma_1 - 2\lambda_u)(\tilde{\lambda}_{\text{nlp}} - \lambda_u) - a = 0. \quad (3.41)$$

因此, (3.40) 可变为

$$\underline{w}_2(1, \sigma_1) = \lambda_u \left(\sigma_1 - \left(\lambda_u + \frac{1}{\lambda_u} \right) \right) = \tilde{\lambda}_{\text{nlp}}(\sigma_1 - \tilde{c}_{\text{nlp}}), \quad (3.42)$$

其中 $\tilde{c}_{\text{nlp}}, \tilde{\lambda}_{\text{nlp}}$ 是给定在 (3.32).

这表明 (3.38) 成立, 步骤 2 完成.

步骤 3. 去证明 $\bar{c}_2 \leq \max\{c_{\text{LLW}}, \hat{c}_{\text{nlp}}\}$.

从命题 3.1 和推论 3.1 可知对 $\hat{c} \in (\sigma_2, \sigma_1)$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v)(t, 0) = (k_1, k_2), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (u, v)(t, \hat{c}t) = (0, 1).$$

由步骤 2 和 $\lambda_{\text{LLW}}c_{\text{LLW}} = \lambda_{\text{LLW}}^2 + 1 - a$ 的观察, 那么利用引理 2.2(a) 推出对 $\hat{c} \in (\sigma_2, \sigma_1)$, 有

$$\bar{c}_2 \leq c_{\hat{c}, \underline{w}_2(1, \hat{c})} = \begin{cases} c_{\text{LLW}}, & \underline{w}_2(1, \hat{c}) \geq -\lambda_{\text{LLW}}^2 + \lambda_{\text{LLW}}\hat{c} - (1 - a), \\ \hat{c} - \frac{2\underline{w}_2(1, \hat{c})}{\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4(\underline{w}_2(1, \hat{c}) + 1 - a)}}, & \underline{w}_2(1, \hat{c}) < -\lambda_{\text{LLW}}^2 + \lambda_{\text{LLW}}\hat{c} - (1 - a). \end{cases} \quad (3.43)$$

让 $\hat{c} \nearrow \sigma_1$, (3.43) 表示为 (记 $\hat{\mu} = \underline{w}_2(1, \sigma_1)$)

$$\bar{c}_2 \leq c_{\sigma_1, \hat{\mu}} = \begin{cases} c_{\text{LLW}}, & \hat{\mu} \geq -\lambda_{\text{LLW}}^2 + \lambda_{\text{LLW}}\sigma_1 - (1 - a), \\ \sigma_1 - \frac{2\hat{\mu}}{\sigma_1 - \sqrt{\sigma_1^2 - 4(\hat{\mu} + 1 - a)}}, & \hat{\mu} < -\lambda_{\text{LLW}}^2 + \lambda_{\text{LLW}}\sigma_1 - (1 - a). \end{cases} \quad (3.44)$$

仍需验证 $c_{\sigma_1, \hat{\mu}} = \max\{c_{\text{LLW}}, \hat{c}_{\text{nlp}}\}$, 其中 $\hat{c}_{\text{nlp}} = \hat{\lambda}_{\text{nlp}} + \frac{1-a}{\hat{\lambda}_{\text{nlp}}}$ 和

$$\hat{\lambda}_{\text{nlp}} = \begin{cases} \frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a}, & \sigma_1 < 2\lambda_u, \quad \sigma_1 \leq 2(\sqrt{a} + \sqrt{1-a}), \\ \tilde{\lambda}_{\text{nlp}}, & \sigma_1 \geq 2\lambda_u, \quad \tilde{\lambda}_{\text{nlp}} \leq \sqrt{1-a}, \\ \sqrt{1-a}, & \text{其他,} \end{cases} \quad (3.45)$$

和 $\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}$ 由引理 3.6 给定. 注意到

$$\hat{\lambda}_{\text{nlp}} = \min\{\lambda_{\hat{\mu}}, \sqrt{1-a}\}, \quad \text{其中 } \lambda_{\hat{\mu}} := \begin{cases} \frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a}, & \sigma_1 < 2\lambda_u, \\ \tilde{\lambda}_{\text{nlp}}, & \sigma_1 \geq 2\lambda_u. \end{cases} \quad (3.46)$$

由 (3.39) 和 (3.42), $\hat{\mu} = \underline{w}_2(1, \sigma_1)$ 能被表示为

$$\hat{\mu} = G(\lambda_{\hat{\mu}}), \quad \text{其中 } G(\lambda) := -\lambda^2 + \sigma_1\lambda - (1 - a) \quad (3.47)$$

和 $\lambda_{\hat{\mu}}$ 是定义在 (3.46). 注意到 $G(\lambda)$ 对 $[0, \frac{\sigma_1}{2}]$ 是严格递增的.

为了稍后的目标, (3.47) 关于 $\lambda_{\hat{\mu}}$ 是二次函数, 记

$$\lambda_{\hat{\mu}} = \frac{\sigma_1 - \sqrt{\sigma_1^2 - 4(\hat{\mu} + 1 - a)}}{2}. \quad (3.48)$$

因为 $\lambda_{\text{LLW}} \in (0, \sqrt{1-a}]$, 我们分成两个情况进行讨论: (i) $\lambda_{\hat{\mu}} < \lambda_{\text{LLW}}$; (ii) $\lambda_{\text{LLW}} \leq \lambda_{\hat{\mu}}$.

(i) $\lambda_{\hat{\mu}} < \lambda_{\text{LLW}}$. (可知 $\lambda_{\text{LLW}} \leq \sqrt{1-a}$.)

由 (3.46), $\hat{\lambda}_{\text{nlp}} = \lambda_{\hat{\mu}} < \lambda_{\text{LLW}}$, 和注意到

$$\hat{c}_{\text{nlp}} = \hat{\lambda}_{\text{nlp}} + \frac{1-a}{\hat{\lambda}_{\text{nlp}}}, \quad c_{\text{LLW}} = \lambda_{\text{LLW}} + \frac{1-a}{\lambda_{\text{LLW}}}, \quad (3.49)$$

和 $s + \frac{1-a}{s}$ 在 $(0, \sqrt{1-a}]$ 里的单调性由此有 $\hat{c}_{\text{nlp}} \geq c_{\text{LLW}}$. 仍需证明 $c_{\sigma_1, \hat{\mu}} = \hat{c}_{\text{nlp}}$.

现在, 由 G 的单调性, 有

$$\hat{\mu} = G(\lambda_{\hat{\mu}}) < G(\lambda_{\text{LLW}}) = -\lambda_{\text{LLW}}^2 + \lambda_{\text{LLW}}\sigma_1 - (1-a).$$

由 (3.44), 有 $c_{\sigma_1, \hat{\mu}} = \sigma_1 - \frac{2\hat{\mu}}{\sigma_1 - \sqrt{\sigma_1^2 - 4(\hat{\mu} + 1 - a)}}$. 因此,

$$c_{\sigma_1, \hat{\mu}} = \sigma_1 - \frac{\hat{\mu}}{\lambda_{\hat{\mu}}} = \lambda_{\hat{\mu}} + \frac{1-a}{\lambda_{\hat{\mu}}} = \hat{c}_{\text{nlp}},$$

其中第一个和第二个等式分别由 (3.48) 和 (3.47) 推出.

(ii) $\lambda_{\text{LLW}} \leq \lambda_{\hat{\mu}}$.

由 (3.46),

$$\hat{\lambda}_{\text{nlp}} = \min\{\lambda_{\hat{\mu}}, \sqrt{1-a}\} \geq \min\{\lambda_{\text{LLW}}, \sqrt{1-a}\} = \lambda_{\text{LLW}}.$$

由 (3.49) 有 $\hat{c}_{\text{nlp}} \leq c_{\text{LLW}}$. 仍需证明 $\hat{\mu} \geq G(\lambda_{\text{LLW}})$, 由 (3.44) 就可推出 $c_{\sigma_1, \hat{\mu}} = c_{\text{LLW}} = \max\{c_{\text{LLW}}, \hat{c}_{\text{nlp}}\}$. 我们可得到 $\lambda_{\text{LLW}} \leq \lambda_{\hat{\mu}} \leq \sigma_1/2$, 由 G 在 $[0, \sigma_1/2]$ 的单调性进而推出

$$\hat{\mu} = G(\lambda_{\hat{\mu}}) \geq G(\lambda_{\text{LLW}}).$$

命题 3.2 的证明完成了. □

3.4.2 c_3 的下界估计

为了方便起见, 记 $\tilde{u}(t, x) = u(t, -x)$, $\tilde{v}(t, x) = v(t, -x)$, 和定义

$$\tilde{u}^\epsilon(t, x) = \tilde{u}\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right), \quad \tilde{v}^\epsilon(t, x) = \tilde{v}\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right), \quad w_3^\epsilon = -\epsilon \log \tilde{v}^\epsilon(t, x).$$

再次定义半放松极限:

$$w_{3,*}(t, x) = \liminf_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w_3^\epsilon(t', x').$$

引理 3.8 假设 (\tilde{u}, \tilde{v}) 是 (1.2) 的解且 $x \rightarrow (\tilde{u}(0, -x), \tilde{v}(0, -x))$ 满足 (H_λ) . 那么, 对每一个小的 $\eta > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (d\lambda_v^- + \frac{r}{\lambda_v} + \eta)t} (|\tilde{u}(t, x) - 1| + |\tilde{v}(t, x)|) = 0. \quad (3.50)$$

证明. v_{KPP} 是

$$\begin{cases} \partial_t v_{\text{KPP}} - d\partial_{xx} v_{\text{KPP}} = rv_{\text{KPP}}(1 - v_{\text{KPP}}), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ v_{\text{KPP}} = \min\{1, Ce^{-\lambda_v^- x}\}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

的解. 通过选择 C 足够大, 应用经典的比较原理我们得到 $0 \leq \tilde{v} \leq v_{\text{KPP}}$. 因此, 对每一个小的 $\eta > 0$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (d\lambda_v^- + \frac{r}{\lambda_v} + \eta)t} |\tilde{v}(t, x)| = 0. \quad (3.51)$$

u_{KPP} 是

$$\begin{cases} \partial_t u_{\text{KPP}} - \partial_{xx} u_{\text{KPP}} = u_{\text{KPP}}(1 - a - u_{\text{KPP}}), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u_{\text{KPP}}(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

的解. 再次使用经典的比较原理表明 $u \geq u_{\text{KPP}}$. 由 [65] 或者 [79] 的结果, 对每一个小的 $\eta > 0$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{x > -(2\sqrt{1-a} + \eta)t} \tilde{u}(t, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{x < (2\sqrt{1-a} - \eta)t} u(t, x) \geq \frac{1-a}{2}. \quad (3.52)$$

取小的 $\eta > 0$, 有 (3.51) 和 (3.52) 成立, 因此应用引理 2.1(b) 我们推出 (3.50). \square

鉴于引理 3.8, 我们得到

$$\chi_{\{x > (d\lambda_v^- + \frac{r}{\lambda_v})t\}} \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{u}^\epsilon(t', x') \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{u}^\epsilon(t', x') \leq 1. \quad (3.53)$$

$(t', x') \rightarrow (t, x) \qquad (t', x') \rightarrow (t, x)$

引理 3.9 假设 (\tilde{u}, \tilde{v}) 是 (1.2) 的解且 $x \rightarrow (\tilde{u}(0, -x), \tilde{v}(0, -x))$ 满足 (H_λ) . 那么, $w_{3,*}$ 是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + d|\partial_x w|^2 + r(1 - b\chi_{\{x > (d\lambda_v^- + \frac{r}{\lambda_v})t\}}), w\} = 0, & (0, \infty) \times (0, \infty), \\ w(0, x) = \lambda_v^- x, & [0, \infty), \\ w(t, 0) = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (3.54)$$

的粘性上解.

证明. 与引理 3.3(b) 的证明类似所以这个证明忽略. \square

命题 3.3 假设 (u, v) 是 (1.2) 的解其初值满足 (H_λ) . 那么

$$c_3 \geq -\max\{\tilde{c}_{LLW}, \sigma_3\},$$

其中 \tilde{c}_{LLW} 和 σ_3 是分别定义在注记 1.1 和 (3.1).

证明. 步骤 1. 首先去证

$$w_{3,*}(t, x) \geq \underline{w}_3(t, x), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times [0, \infty), \quad (3.55)$$

其中 $\underline{w}_3 : [0, \infty) \times [0, \infty)$ 是通过以下定义

$$\underline{w}_3(t, x) = \lambda_v^- \max \left\{ x - (d\lambda_v^- + \frac{r}{\lambda_v^-})t, 0 \right\}.$$

正如命题 3.2 的步骤 1, 可验证 \underline{w}_3 是 (3.54) 的粘性下解. 由 \underline{w}_3 的表达式, 注记 3.3 和 $w_{1,*}(t, -x) = w_{3,*}(t, x)$, 在 $\partial[(0, \infty) \times (0, \infty)]$ 有 $\underline{w}_3(t, x) = \lambda_v^- \max\{x, 0\} = w_{3,*}(t, x)$. 因此应用定理 3.5 推出 (3.55).

步骤 2. 去证明对每一个 $\hat{c} \geq 0$, 有

$$\tilde{v}(t, \hat{c}t) \leq \exp\{(\underline{w}_3(1, \hat{c}) + o(1))t\}, \quad t \gg 1. \quad (3.56)$$

按照命题 3.2 的步骤 2 可以得到以上结论.

步骤 3. 证明 $c_3 \geq -\max\{\tilde{c}_{LLW}, \sigma_3\}$.

固定 $\hat{c} > (d\lambda_v^- + \frac{r}{\lambda_v^-})$. 由命题 3.1 和引理 3.8, 我们推出

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{u}, \tilde{v})(t, 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} (u, v)(t, 0) = (k_1, k_2), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{u}, \tilde{v})(t, \hat{c}t) = (1, 0). \quad (3.57)$$

这验证了引理 2.2(b) 的条件 (i). 接下来, 通过步骤 2, 有

$$\tilde{v}(t, \hat{c}t) \leq \exp\{-(\hat{\mu}_2 + o(1))t\}, \quad t \gg 1,$$

其中

$$\hat{\mu}_2 = \underline{w}_3(1, \hat{c}) = \lambda_v^- (\hat{c} - (d\lambda_v^- + \frac{r}{\lambda_v^-})). \quad (3.58)$$

为之后的目的我们注意到 $\hat{\mu}_2$ 关于 λ_v^- 是二次方的函数, 所以

$$\hat{\mu}_2 = \lambda_v^- \hat{c} - d(\lambda_v^-)^2 - r, \quad \lambda_v^- = \frac{\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4d(\hat{\mu}_2 + r)}}{2d}. \quad (3.59)$$

然后可应用引理 2.2(b) 我们推出

$$-c_3 \leq \tilde{c}_{\hat{c}, \hat{\mu}_2} = \begin{cases} \tilde{c}_{\text{LLW}}, & \hat{\mu}_2 \geq \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}(\hat{c} - \tilde{c}_{\text{LLW}}), \\ \hat{c} - \frac{2d\hat{\mu}_2}{\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4d[\hat{\mu}_2 + r(1-b)]}}, & 0 < \hat{\mu}_2 < \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}(\hat{c} - \tilde{c}_{\text{LLW}}). \end{cases} \quad (3.60)$$

为了完成这个证明, 需验证

$$\limsup_{\hat{c} \rightarrow \infty} \tilde{c}_{\hat{c}, \hat{\mu}_2} \leq \max\{\tilde{c}_{\text{LLW}}, \sigma_3\}.$$

因为 $0 = -d\tilde{\lambda}_{\text{LLW}}^2 + \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}\tilde{c}_{\text{LLW}} - r(1-b)$, 那么

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_2 - \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}(\hat{c} - \tilde{c}_{\text{LLW}}) &= \hat{\mu}_2 - (-d\tilde{\lambda}_{\text{LLW}}^2 + \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}\hat{c} - r(1-b)) \\ &= \left(\lambda_v^- - \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}\right) \left[\hat{c} - d(\lambda_v^- + \tilde{\lambda}_{\text{LLW}})\right] - rb, \end{aligned} \quad (3.61)$$

其中最后一个等式利用 (3.59).

(i) 当 $\lambda_v^- > \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}$, 在 (3.61) 里取 $\hat{c} \rightarrow \infty$ 我们得到

$$\hat{\mu}_2 \geq \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}(\hat{c} - \tilde{c}_{\text{LLW}}),$$

所以由 (3.60), 有 $-c_3 \leq \tilde{c}_{\text{LLW}} \leq \max\{\tilde{c}_{\text{LLW}}, \sigma_3\}$;

(ii) 当 $\lambda_v^- \leq \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}$, 有 $\lambda_v^- \leq \tilde{\lambda}_{\text{LLW}} \leq \sqrt{\frac{r(1-b)}{d}}$ 和

$$\sigma_3 = d\lambda_v^- + \frac{r(1-b)}{\lambda_v^-} \geq d\tilde{\lambda}_{\text{LLW}} + \frac{r(1-b)}{\tilde{\lambda}_{\text{LLW}}} = \tilde{c}_{\text{LLW}}.$$

有

$$0 < \hat{\mu}_2 < \tilde{\lambda}_{\text{LLW}}(\hat{c} - \tilde{c}_{\text{LLW}}).$$

记 $\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}_2} = \frac{\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4d[\hat{\mu}_2 + r(1-b)]}}{2d}$. 那么

$$d(\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}_2})^2 - \hat{c}\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}_2} + \hat{\mu}_2 + r(1-b) = 0, \quad (3.62)$$

和 $\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}_2} \leq \lambda_v^-$ (通过与 (3.59) 的第二部分比较). 因此, 我们得到

$$-c_3 \leq c_{\hat{c}, \hat{\mu}_2} = \hat{c} - \frac{\hat{\mu}_2}{\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}_2}} = d\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}_2} + \frac{r(1-b)}{\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}_2}}. \quad (3.63)$$

接下来, 验证

$$\lim_{\hat{c} \rightarrow \infty} \lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}_2} = \lambda_v^-. \quad (3.64)$$

为此, 从 (3.62) 减去 (3.59) 的第一部分我们得到

$$d(\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}_2})^2 - \hat{c}(\lambda_{\hat{c}, \hat{\mu}_2} - \lambda_v^-) - d(\lambda_v^-)^2 - rb = 0.$$

上面的除以 \hat{c} 且让 $\hat{c} \rightarrow \infty$, 推出 (3.64).

由 (3.64), 在 (3.63) 里取 $\hat{c} \rightarrow \infty$ 我们得到 $-c_3 \leq \sigma_3 \leq \max\{\tilde{c}_{LLW}, \sigma_3\}$.

至此完成命题 3.3 的证明. □

3.4.3 定理 3.1 的证明

定理 3.1 的证明. 对于 $i = 1, 2, 3$, $\bar{c}_i, \underline{c}_i$ 是 (2.10) 中定义的最大最小传播速度. 由定义直接可得 $\bar{c}_i \geq \underline{c}_i$. 由推论 3.1, 有 $\bar{c}_1 = \underline{c}_1 = \sigma_1$. 由命题 3.1(ii) 和引理 3.6, 我们得到 $\underline{c}_2 \geq \max\{c_{LLW}, \hat{c}_{np}\}$, 再和命题 3.2 里的 $\bar{c}_2 \leq \max\{c_{LLW}, \hat{c}_{np}\}$ 结合, 有 $\bar{c}_2 = \underline{c}_2 = \max\{c_{LLW}, \hat{c}_{np}\}$. 此外, 结合命题 3.1 和 3.3 有 $\bar{c}_3 = \underline{c}_3 = -\max\{\sigma_3, \tilde{c}_{LLW}\}$. 对所有的 $i = 1, 2, 3$, 可知 c_i 是在 (3.3) 定义的, 有 $\bar{c}_i = \underline{c}_i = c_i$. 为了完成定理 3.1 的证明, 仍需证 (3.2).

注意到 (3.2) 的前两项是推论 3.1 的直接结果. 接下来, 我们将证明对小的 $\eta > 0$ 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{(c_3 + \eta)t < x < (\sigma_1 - \eta)t} v(t, x) > 0. \quad (3.65)$$

给定小的 $\eta > 0$, 由 \bar{c}_3 和 \underline{c}_1 的定义表明 $c'_3 \in (c_3, c_3 + \eta)$, $\sigma'_1 \in (\sigma_1 - \eta, \sigma_1)$, 和 $T > 0$ 的存在性使得

$$\inf_{t \geq T} \min\{v(t, c'_3 t), v(t, \sigma'_1 t)\} > 0.$$

现在, 定义

$$\delta := \min \left\{ \frac{1-b}{2}, \inf_{c'_3 T < x < \sigma'_1 T} v(T, x), \inf_{t \geq T} \min\{v(t, c'_3 t), v(t, \sigma'_1 t)\} \right\} > 0.$$

注意到 $v(t, x)$ 和 δ 组成 KPP 方程 $\partial_t v = d\partial_{xx}v + rv(1 - b - v)$ 其在抛物边界 $\Omega := \{(t, x) : t \geq T, c_3't < x < \sigma_1't\}$ 满足 $v(t, x) \geq \delta$ 的一组上下解. 由最大值原理可得在 Ω 内 $v \geq \delta$. 特别地, (3.65) 成立.

相似地, 由定义 c_2 和引理 3.8 中的 (3.52), 可证明对小的 $\eta > 0$ 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{x < (c_2 - \eta)t} u(t, x) > 0. \quad (3.66)$$

固定小的 $\eta > 0$. 鉴于 (3.65) 和 (3.66), 通过应用引理 2.1 的 (a) 和 (c) 可知 (3.2) 的第三项成立. 最后, 因为 (3.66) 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < (c_3 - \eta)t} v = 0$ (由 c_3 的定义), 通过引理 2.1(b), (3.2) 的最后一个式子成立. 定理 3.1 的证明到此完成. \square

3.5 Tang 和 Fife 的入侵模式

在这节, 假设 $\sigma_1 = \sigma_2$, 然后证明定理 3.2.

定理 3.2 的证明. 对于任意小的 $\delta \in (0, 1)$, $(\underline{u}^\delta, \bar{v}^\delta)$ 和 $(\bar{u}^\delta, \underline{v}^\delta)$ 分别是

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx}u = u(1 - u - av), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t v - d\partial_{xx}v = rv(1 + \delta - bu - v), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.67)$$

和

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx}u = u(1 - u - av), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t v - d\partial_{xx}v = rv(1 - \delta - bu - v), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.68)$$

的解其初值满足 (H_λ) . 通过比较, 我们推出

$$(\underline{u}^\delta, \bar{v}^\delta) \preceq (u, v) \preceq (\bar{u}^\delta, \underline{v}^\delta), \quad [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (3.69)$$

注意 $(\underline{u}^\delta, \bar{v}^\delta)$ 是 (3.67) 的解当且仅当

$$(\underline{U}^\delta, \bar{V}^\delta) = \left(\underline{u}, \frac{\bar{v}^\delta}{1 + \delta} \right) \quad (3.70)$$

是

$$\begin{cases} \partial_t U - \partial_{xx}U = U(1 - U - \bar{a}^\delta V), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t V - d\partial_{xx}V = \bar{r}^\delta V(1 - \underline{b}^\delta U - V), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.71)$$

的解, 其中 $\bar{a}^\delta = (1 + \delta)a$, $\bar{r}^\delta = (1 + \delta)r$ 和 $\bar{b}^\delta = \frac{b}{1 + \delta}$. 注意到通过选择足够小的 δ 有 $\bar{\sigma}_1^\delta = d(\lambda_v^+ \wedge \sqrt{\frac{\bar{r}^\delta}{d}}) + \frac{\bar{r}^\delta}{\lambda_v^+ \wedge \sqrt{\frac{\bar{r}^\delta}{d}}} > \sigma_1 = \sigma_2$ 和 $0 < \bar{a}^\delta, \bar{b}^\delta < 1$. 通过对 (3.71) 应用定理 3.1, 我们推出 \bar{V}^δ 的向右和向左的传播速度 \bar{c}_1^δ 和 \bar{c}_3^δ (其与 \bar{v}^δ 的是相同的), 和 \bar{U}^δ 的向右传播速度 \bar{c}_2^δ (与 \bar{u}^δ 的相同) 存在. 而且, 他们能被刻画成

$$\bar{c}_1^\delta = \bar{\sigma}_1^\delta, \quad \bar{c}_2^\delta = \max\{\bar{c}_{LLW}^\delta, \hat{c}_{nlp}^\delta\}, \quad \bar{c}_3^\delta = -\max\{\bar{c}_{LLW}^\delta, \bar{\sigma}_3^\delta\}.$$

精确地说, 正如定理 1.1 (注记 1.1) 给出的, \bar{c}_{LLW}^δ (\bar{c}_{LLW}^δ) 是 (3.71) 的传播速度, 有 $\bar{\sigma}_3^\delta = d(\lambda_v^- \wedge \sqrt{\frac{\bar{r}^\delta}{d}}) + \frac{\bar{r}^\delta(1 - \bar{b}^\delta)}{\lambda_v^- \wedge \sqrt{\frac{\bar{r}^\delta}{d}}}$ 且此外

$$\hat{c}_{nlp}^\delta = \begin{cases} \frac{\bar{\sigma}_1^\delta}{2} - \sqrt{\bar{a}^\delta} + \frac{1 - \bar{a}^\delta}{\frac{\bar{\sigma}_1^\delta}{2} - \sqrt{\bar{a}^\delta}}, & \bar{\sigma}_1^\delta < 2\lambda_u, \quad \bar{\sigma}_1^\delta \leq 2(\sqrt{\bar{a}^\delta} + \sqrt{1 - \bar{a}^\delta}), \\ \bar{\lambda}_{nlp}^\delta + \frac{1 - \bar{a}^\delta}{\bar{\lambda}_{nlp}^\delta}, & \bar{\sigma}_1^\delta \geq 2\lambda_u, \quad \bar{\lambda}_{nlp}^\delta \leq \sqrt{1 - \bar{a}^\delta}, \\ 2\sqrt{1 - \bar{a}^\delta}, & \text{其他,} \end{cases} \quad (3.72)$$

其中 $\bar{\lambda}_{nlp}^\delta = \frac{1}{2} \left[\bar{\sigma}_1^\delta - \sqrt{(\bar{\sigma}_1^\delta - 2\lambda_u)^2 + 4\bar{a}^\delta} \right]$.

与 (3.69) 联系, 我们比较 (u, v) 的传播速度 \bar{c}_1, \bar{c}_2 和 \bar{c}_3 :

$$\bar{c}_1 \leq \bar{c}_1^\delta, \quad \bar{c}_2 \geq \bar{c}_2^\delta, \quad \bar{c}_3 \geq \bar{c}_3^\delta. \quad (3.73)$$

仍需证当 $\delta \rightarrow 0$, 有 $\hat{c}_{nlp}^\delta \rightarrow \sigma_2$. 我们分成两种情形:

- (i) 如果 $\lambda_u > 1$, 那么 $\sigma_1 = \sigma_2 = 2 < 2\lambda_u$. 因为 $1 < \sqrt{a} + \sqrt{1 - a}$, 通过选择足够小的 $\delta > 0$, 我们得到 $\bar{\sigma}_1^\delta < 2\lambda_u$ 和 $\bar{\sigma}_1^\delta \leq 2(\sqrt{\bar{a}^\delta} + \sqrt{1 - \bar{a}^\delta})$, 其表明当 $\delta \rightarrow 0$ 时有 $\hat{c}_{nlp}^\delta = \frac{\bar{\sigma}_1^\delta}{2} - \sqrt{\bar{a}^\delta} + \frac{1 - \bar{a}^\delta}{\frac{\bar{\sigma}_1^\delta}{2} - \sqrt{\bar{a}^\delta}} \rightarrow 1 - \sqrt{a} + \frac{1 - a}{1 - \sqrt{a}} = 2 = \sigma_2$.
- (ii) 如果 $\lambda_u \leq 1$, 那么首先称

$$\bar{\sigma}_1^\delta \geq \sigma_1 \geq 2\lambda_u, \quad (3.74)$$

其是由于 $\bar{\sigma}_1^\delta \geq \sigma_1 = \sigma_2 = \lambda_u + \frac{1}{\lambda_u} \geq 2 \geq 2\lambda_u$.

接下来, 称

$$\tilde{\lambda}_{nlp} < \sqrt{1 - a}, \quad (3.75)$$

其中 $\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}$ 由 (3.5) 给定. 为此, 注意到

$$\sigma_1 - 2\sqrt{1-a} < \sqrt{(\sigma_1 - 2\lambda_u)^2 + 4a} \quad (3.76)$$

是

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - 2\sqrt{1-a})^2 - [(\sigma_1 - 2\lambda_u)^2 + 4a] &= 4(2 - 2a - \sigma_1\sqrt{1-a}) \\ &\leq 4(2 - 2a - 2\sqrt{1-a}) < 0, \end{aligned}$$

的一个结果. 从 $\tilde{\lambda}_{\text{nlp}} = \frac{1}{2}[\sigma_1 - \sqrt{(\sigma_1 - 2\lambda_u)^2 + 4a}]$ 的定义, 我们推出 (3.75).

由 (3.74) 和 (3.75), 对小的 δ 有 $\bar{\sigma}_1^\delta \geq 2\lambda_u$ 和 $\bar{\lambda}_{\text{nlp}}^\delta < \sqrt{1-a^\delta}$, 因此当 $\delta \rightarrow 0$ 时有

$$\hat{c}_{\text{nlp}}^\delta = \bar{\lambda}_{\text{nlp}}^\delta + \frac{1-a^\delta}{\bar{\lambda}_{\text{nlp}}^\delta} \rightarrow \tilde{\lambda}_{\text{nlp}} + \frac{1-a}{\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}}.$$

要达到 $\hat{c}_{\text{nlp}}^\delta \rightarrow \sigma_2$, 仍需证 $\sigma_2 = \tilde{\lambda}_{\text{nlp}} + \frac{1-a}{\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}}$. 为此, 从 $\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}$ 的定义, 可知 (3.5) 有

$$\tilde{\lambda}_{\text{nlp}} = \frac{\sigma_1 - \sqrt{(\sigma_1 - 2\lambda_u)^2 + 4a}}{2} = \frac{2(\sigma_1\lambda_u - \lambda_u^2 - a)}{\sigma_1 + \sqrt{(\sigma_1 - 2\lambda_u)^2 + 4a}}.$$

利用 $\sigma_1 = \sigma_2 = \lambda_u + \frac{1}{\lambda_u}$, 我们推出

$$\tilde{\lambda}_{\text{nlp}} = \frac{\sigma_2 - \sqrt{(\sigma_2 - 2\lambda_u)^2 + 4a}}{2} = \frac{2(1-a)}{\sigma_2 + \sqrt{(\sigma_2 - 2\lambda_u)^2 + 4a}}. \quad (3.77)$$

这表明了 $\sigma_2 = \tilde{\lambda}_{\text{nlp}} + \frac{1-a}{\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}}$. 证明完成了.

因此, 由 $\underline{c}_{\text{LLW}}^\delta$ 和 $\bar{c}_{\text{LLW}}^\delta$ 关于 δ 的连续性 (参见, [96, 第三章的定理 4.2]), 在 (3.73) 里 $\delta \rightarrow 0$ 时满足

$$\bar{c}_1 \leq \sigma_1, \quad c_2 \geq \sigma_2, \quad c_3 \geq -\max\{\bar{c}_{\text{LLW}}, \sigma_3\}. \quad (3.78)$$

通过相似的过程, 我们可得到 $(\bar{u}^\delta, v^\delta)$ 是 (3.68) 的解当且仅当

$$(\bar{U}^\delta, \underline{V}^\delta) = \left(\bar{u}^\delta, \frac{v^\delta}{1-\delta} \right)$$

是

$$\begin{cases} \partial_t U - \partial_{xx} U = U(1-U - \underline{a}^\delta V), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t V - d\partial_{xx} V = \underline{r}^\delta V(1 - \bar{b}^\delta U - V), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.79)$$

的解, 其中 $\underline{a}^\delta = (1 - \delta)a$, $\underline{r}^\delta = (1 - \delta)r$ 和 $\bar{b}^\delta = \frac{b}{1 - \delta}$. 注意到对足够小的 δ 有 $\underline{\sigma}_1^\delta = d(\lambda_v^+ \wedge \sqrt{\frac{r^\delta}{d}}) + \frac{r^\delta}{\lambda_v^+ \wedge \sqrt{\frac{r^\delta}{d}}} < \sigma_1 = \sigma_2$ 和 $0 < \underline{a}^\delta, \bar{b}^\delta < 1$. 在 (1.2) 里通过相互交换 u 和 v 的角色, 我们再次通过上面类似的证明和应用定理 3.1 推出

$$c_1 \geq \sigma_1, \quad \bar{c}_2 \leq \sigma_2 \quad \text{和} \quad \bar{c}_3 \leq -\max\{\tilde{c}_{\text{LLW}}, \sigma_3\}. \quad (3.80)$$

由 $c_i \leq \bar{c}_i$, (3.78), (3.80) 和 $\sigma_1 = \sigma_2$ 的结合得到定理 3.2. \square

3.6 Girardin 和 Lam 的研究: $0 < a < 1 < b$ 情形

迄今为止, 我们研究弱竞争 ($0 < a, b < 1$) 情形的 Hamilton-Jacobi 方法, 也可应用于处理 ($0 < a < 1 < b$) 情形, 这种情形由 Girardin 和 Lam [47] 研究的. 对于已由 [47] 完成研究的 Cauchy 问题, 这提供了一种比构造全局上-下解方法更加明显直接的供选方法. 类似于定理 3.1 的证明, 我们可证明以下结果.

定理 3.3 假设 $0 < a < 1 < b$ 和 $\sigma_1 > \sigma_2$. (u, v) 是 (1.2) 的解其初值满足 (H_λ) . 那么存在 $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ 使得 $c_1 > c_2$ 和, 对每一个小的 $\eta > 0$, 下列传播结果成立:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (c_1 + \eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_2 + \eta)t < x < (c_1 - \eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x) - 1|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x < (c_2 - \eta)t} (|u(t, x) - 1| + |v(t, x)|) = 0. \end{cases} \quad (3.81)$$

准确的说, 传播速度 c_1 和 c_2 可由以下确定:

$$c_1 = \sigma_1, \quad c_2 = \max\{\hat{c}_{\text{LLW}}, \hat{c}_{\text{nlp}}\},$$

其中 σ_1 是定义在 (3.1), \hat{c}_{LLW} 表示 (1.2) 的连接 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 的最小速度和 \hat{c}_{nlp} 由以下给定

$$\hat{c}_{\text{nlp}} = \begin{cases} \frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{\sigma_1 - \sqrt{a}}, & \sigma_1 < 2\lambda_u, \quad \sigma_1 \leq 2(\sqrt{a} + \sqrt{1-a}), \\ \tilde{\lambda}_{\text{nlp}} + \frac{1-a}{\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}}, & \sigma_1 \geq 2\lambda_u, \quad \tilde{\lambda}_{\text{nlp}} \leq \sqrt{1-a}, \\ 2\sqrt{1-a}, & \text{其他,} \end{cases} \quad (3.82)$$

和

$$\tilde{\lambda}_{\text{nlp}} = \frac{1}{2} \left[\sigma_1 - \sqrt{(\sigma_1 - 2\lambda_u)^2 + 4a} \right]. \quad (3.83)$$

由定理 3.3 可知, 传播速度 c_2 由 σ_1 (即 c_1) 确定和 λ_u . 在下文中, 对固定的 λ_u , 我们研究 c_2 和 σ_1 的关系. 定义辅助函数:

$$f(\sigma_1) = \frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a} + \frac{1-a}{\frac{\sigma_1}{2} - \sqrt{a}}, \quad g(\sigma_1) = \tilde{\lambda}_{\text{nlp}} + \frac{1-a}{\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}},$$

其中 $\tilde{\lambda}_{\text{nlp}}$ 由 (3.83) 给定. 容易可得 f 在 $[2\sqrt{1-a}, 2(\sqrt{1-a} + \sqrt{a})]$ 内是递减和双射的, 而 g 在

$$\begin{cases} \left[2\sqrt{1-a}, \lambda_u + \sqrt{1-a} + \frac{a}{\lambda_u - \sqrt{1-a}} \right], & \lambda_u \geq \sqrt{1-a}, \\ \left(\lambda_u + \sqrt{1-a} + \frac{a}{\lambda_u - \sqrt{1-a}}, \infty \right), & \lambda_u < \sqrt{1-a}, \end{cases}$$

是递减和双射. 更准确地说, 有

$$\begin{cases} f^{-1}(c_2) = c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4(1-a)} + 2\sqrt{a}, \\ g^{-1}(c_2) = \lambda_u + \frac{c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4(1-a)}}{2} + \frac{a}{\lambda_u - \frac{c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4(1-a)}}{2}}. \end{cases}$$

当 $\sigma_1 \rightarrow \infty$ 考虑到 $\tilde{\lambda}_{\text{nlp}} \rightarrow \lambda_u$, 有 $g_\infty := g(\infty) = \lambda_u + \frac{1-a}{\lambda_u}$. 对固定的 λ_u 和 λ_v^+ (或 σ_1) 变化, 由定理 3.3, 可如下重写传播速度 c_2 .

(a) 对于 $g_\infty \leq \hat{c}_{\text{LLW}}$, 有:

(a1) 如果 $\lambda_u \geq (\sqrt{a} + \sqrt{1-a})$, 那么

$$c_2 = \begin{cases} f(\sigma_1), & \max\{2\sqrt{dr}, \sigma_2\} \leq \sigma_1 \leq f^{-1}(\hat{c}_{\text{LLW}}), \\ \hat{c}_{\text{LLW}}, & \sigma_1 > f^{-1}(\hat{c}_{\text{LLW}}), \end{cases}$$

与 λ_u 无关;

(a2) 如果 $\sqrt{dr} \leq \lambda_u < \sqrt{a} + \sqrt{1-a}$ 和 $g^{-1}(\hat{c}_{\text{LLW}}) > 2\lambda_u$, 那么

$$c_2 = \begin{cases} f(\sigma_1), & \max\{2\sqrt{dr}, \sigma_2\} \leq \sigma_1 < 2\lambda_u, \\ g(\sigma_1), & 2\lambda_u \leq \sigma_1 < g^{-1}(\hat{c}_{\text{LLW}}), \\ \hat{c}_{\text{LLW}}, & \sigma_1 \geq g^{-1}(\hat{c}_{\text{LLW}}); \end{cases}$$

(a3) 如果 $\lambda_u < \sqrt{dr}$, 那么

$$c_2 = \begin{cases} g(\sigma_1), & \max\{2\sqrt{dr}, \sigma_2\} \leq \sigma_1 < g^{-1}(\hat{c}_{LLW}), \\ \hat{c}_{LLW}, & \sigma_1 \geq g^{-1}(\hat{c}_{LLW}); \end{cases}$$

(b) 对于 $g_\infty > \hat{c}_{LLW}$, 有:

(b1) 如果 $\lambda_u \geq (\sqrt{a} + \sqrt{1-a})$, 那么

$$c_2 = \begin{cases} f(\sigma_1), & \max\{2\sqrt{dr}, \sigma_2\} \leq \sigma_1 \leq f^{-1}(\hat{c}_{LLW}), \\ \hat{c}_{LLW}, & \sigma_1 > f^{-1}(\hat{c}_{LLW}), \end{cases}$$

与 λ_u 无关;

(b2) 如果 $\sqrt{dr} \leq \lambda_u < \sqrt{a} + \sqrt{1-a}$, 那么

$$c_2 = \begin{cases} f(\sigma_1), & \max\{2\sqrt{dr}, \sigma_2\} \leq \sigma_1 < 2\lambda_u, \\ g(\sigma_1), & \sigma_1 \geq 2\lambda_u; \end{cases}$$

(b3) 如果 $\lambda_u < \sqrt{dr}$, 那么

$$c_2 = g(\sigma_1), \quad \sigma_1 \geq \max\{2\sqrt{dr}, \sigma_2\}.$$

对 (a) $g_\infty \leq \hat{c}_{LLW}$, 给定在 (a1)-(a3) 的传播速度 σ_1 和 c_2 的关系在图 3.2 里说明. 因此我们得到 (1.2) 的精确的传播速度, 他们完全都由 $\lambda_u, \lambda_v^+ \in (0, \infty)$ 确定. 遍历所有 λ_u , 可达速度 σ_1 和 c_2 的集合与 [47, 图 1.1] 一致. 特别的, 下面命题是定理 3.3 的直接结果, 通过阐明初值指数衰减率 (λ_u, λ_v^+) 的作用, 这提高了 [47, 定理 1.3].

命题 3.4 让 $(\bar{c}, \underline{c}) \in (2\sqrt{dr}, \infty) \times (\hat{c}_{LLW}, \infty)$ 使得 $\bar{c} > \underline{c}$.

(a) 如果 $\underline{c} < f(\bar{c})$, 那么 (\bar{c}, \underline{c}) 不是初值为 (H_λ) 的 (1.2) 的解的传播速度对.

(b) 如果 $\underline{c} = f(\bar{c})$, 那么存在唯一的 $\lambda_v^+ = \frac{1}{2d}(\bar{c} - \sqrt{\bar{c}^2 - 4dr})$ 使得对 $\lambda_u \in [\bar{c}/2, \infty)$ 有 (\bar{c}, \underline{c}) 是初值为 (H_λ) 的 (1.2) 的解的传播速度对.

(c) 如果 $\underline{c} > f(\bar{c})$, 那么存在一对 (λ_v^+, λ_u) 使得 (\bar{c}, \underline{c}) 是初值为 (H_λ) 的 (1.2) 的解的传播速度对.

证明. (a) 直接从 [47, 定理 1.2] 可得. 对于(b), 有 $\underline{c} > \hat{c}_{LLW} \geq 2\sqrt{1-a}$. 因此从 (3.82) 推出 (b). 仍需证 (c).

首先, 定义 $\lambda_v^+ = \frac{\bar{c} - \sqrt{\bar{c}^2 - 4dr}}{2d} \in (0, \sqrt{\frac{r}{d}})$ 使得 $\bar{c} = \sigma_1 = d\lambda_v^+ + \frac{r}{\lambda_v^+}$. 因为 σ_1 在 $(0, \sqrt{\frac{r}{d}})$ 内是严格单调的, 这样 λ_v^+ 的选择是唯一的. 那么决定 λ_u 使得 $c_2 = \underline{c} = \tilde{\lambda}_{nlp} + \frac{1-a}{\tilde{\lambda}_{nlp}}$.

因为 $\underline{c} > f(\bar{c}) \geq 2\sqrt{1-a}$ 和 $\underline{c} > \hat{c}_{LLW}$, 为了满足 $c_2 = \underline{c}$, 由 (3.82), 必须有 $\lambda_u \in (\frac{\bar{c} - \sqrt{\bar{c}^2 - 4a}}{2}, \frac{\bar{c}}{2})$ 和

$$\underline{c} = g(\bar{c}), \quad \tilde{\lambda}_{nlp} = \frac{1}{2} \left[\bar{c} - \sqrt{(\bar{c} - 2\lambda_u)^2 + 4a} \right] < \sqrt{1-a}. \quad (3.84)$$

因此, 它选取唯一的 $\lambda_u \in (\frac{\bar{c} - \sqrt{\bar{c}^2 - 4a}}{2}, \frac{\bar{c}}{2})$ 足够使得 (3.84) 成立.

- (i) 如果 $\bar{c} \leq 2(\sqrt{1-a} + \sqrt{a})$, 那么注意到当 $\lambda_u \in (\frac{\bar{c} - \sqrt{\bar{c}^2 - 4a}}{2}, \frac{\bar{c}}{2})$, $\tilde{\lambda}_{nlp} \in (0, \bar{c}/2 - \sqrt{a})$ 关于 λ_u 是递增的, 所以

$$g(\bar{c}) = \tilde{\lambda}_{nlp} + \frac{1-a}{\tilde{\lambda}_{nlp}} \in (f(\bar{c}), \bar{c}),$$

关于 λ_u 是递减的. 记 $\underline{c} \in (f(\bar{c}), \bar{c})$, 选择唯一的 $\lambda_u \in (\frac{\bar{c} - \sqrt{\bar{c}^2 - 4a}}{2}, \frac{\bar{c}}{2})$ 使得 (3.84) 成立;

- (ii) 如果 $\bar{c} > 2(\sqrt{1-a} + \sqrt{a})$, 那么为了在 (3.84) 里满足 $\tilde{\lambda}_{nlp} < \sqrt{1-a}$, $\lambda_u \in (\frac{\bar{c} - \sqrt{\bar{c}^2 - 4a}}{2}, \frac{\bar{c} - \sqrt{(\bar{c} - 2\sqrt{1-a})^2 - 4a}}{2})$ 是必须的. 这种情况下,

$$\tilde{\lambda}_{nlp} \in (0, \sqrt{1-a}) \quad \text{因此} \quad g(\bar{c}) = \tilde{\lambda}_{nlp} + \frac{1-a}{\tilde{\lambda}_{nlp}} \in (2\sqrt{1-a}, \bar{c}),$$

关于 λ_u 是严格单调的, 所以存在唯一的 λ_u 使得 (3.84) 成立.

这完成证明. □

3.7 延展结果

在这节中, 我们考虑下面的竞争系统:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = u(1 - u - av - h(t, x)), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t v - d\partial_{xx} v = rv(1 - bu - v - k(t, x)), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & \mathbb{R}, \\ v(0, x) = v_0(x), & \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.85)$$

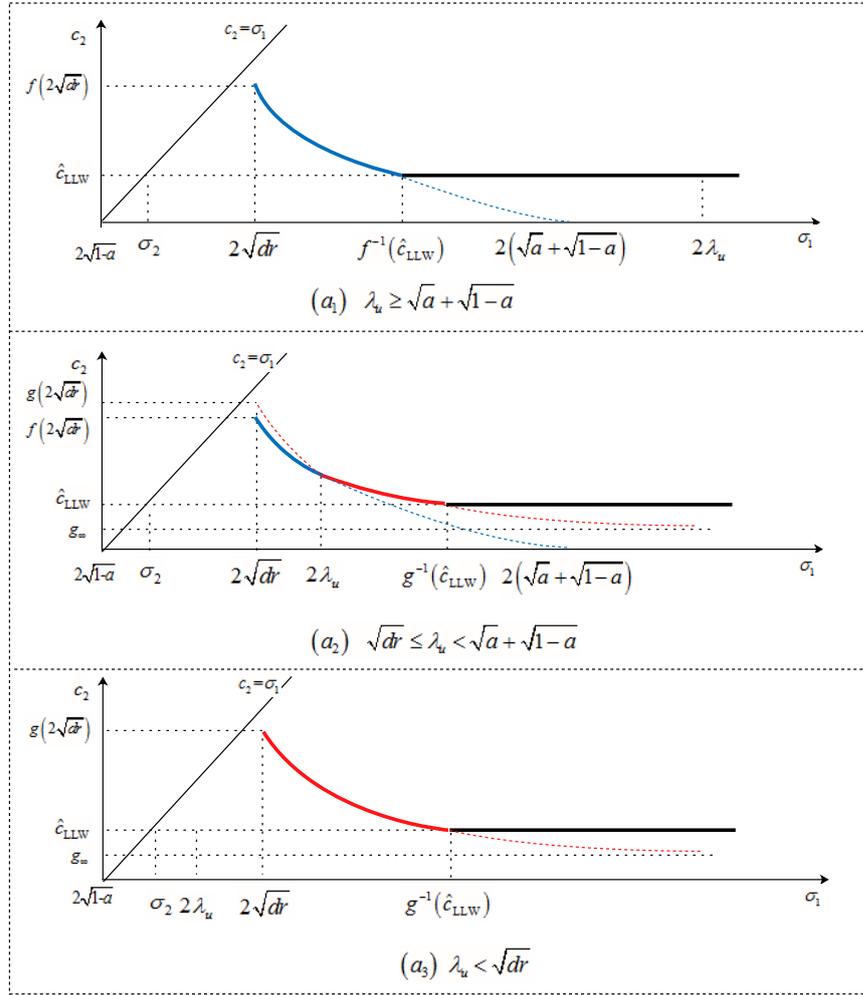


图 3.2 (a) $g_\infty \leq \hat{c}_{LLW}$: $c_2(\sigma_1)$ 的图形, 其实线表示, 蓝色表示 f , 红色表示 g .

其中对某一 $c_0 \in \mathbb{R}$, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \geq c_0 t} (|h(t, x)| + |k(t, x)|) = 0. \quad (3.86)$$

这是为第四章研究三物种竞争扩散系统打下基础.

定理 3.4 假设 $d, r, b > 0$, $0 < a < 1$ 和 $\sigma_1 > \sigma_2$, $h(t, x), k(t, x)$ 是非负的且满足 (3.86). 假设 (u, v) 是 (3.85) 的解其初值满足 (H_λ) , 和

$$c_0 < \sigma'_2, \quad \sigma'_2 = (\lambda_u \wedge \sqrt{1-a}) + \frac{1-a}{\lambda_u \wedge \sqrt{1-a}}.$$

那么,

$$c_1 = \bar{c}_1 = \sigma_1, \quad \bar{c}_2 \leq \max\{c_{LLW}, \hat{c}_{nlp}\}, \quad c_2 \geq \hat{c}_{nlp},$$

其中 c_i, \bar{c}_i ($i = 1, 2$) 是定义在 (2.10). 此外, 对每一个小的 $\eta > 0$,

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (\sigma_1 + \eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\bar{c}_2 + \eta)t < x < (\sigma_1 - \eta)t} (|u(t, x)| + |v(t, x) - 1|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{(c_0 + \eta)t < x < (c_2 - \eta)t} u(t, x) > 0, \end{cases} \quad (3.87)$$

其中 σ_1, σ_2 是定义在 (3.1) 且 c_{LLW}, \hat{c}_{nlp} 分别由定理 1.1 和 3.1 给定.

证明. 这个证明能模仿定理 3.1 的证明.

步骤 1. $\bar{c}_1 \leq \sigma_1$ 和 $\bar{c}_2 \leq \sigma_2$ 的估计能通过命题 3.1 里相似的证明得到, 这里忽略了细节.

步骤 2. 证明对每一个小的 $\eta > 0$, 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t, (\sigma'_2 - \eta)t) > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} v(t, (\sigma_1 - \eta)t) > 0. \quad (3.88)$$

仅证明第一个因为第二个的证明是类似的. 对 $\lambda_u \geq \sqrt{1-a}$ 情形, 由 (3.86) 和 $c_0 < \sigma'_2$, 对足够大的 T 来说, 系统 (3.85) 在 $\{(t, x) : x \geq \frac{c_0 + \sigma'_2}{2}t, t \geq T\}$ 内与 (1.2) 是近似相同的, 所以通过与第二章命题 3.1 中步骤 4 里相似的证明推出 (3.88). 仍需考虑 $\lambda_u < \sqrt{1-a}$ 的情形.

固定任意的 $c' \in (\max\{\frac{c_0 + \sigma'_2}{2}, 2\sqrt{1-a}\}, \sigma'_2)$. 这足以证明存在正的常数 $\delta, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, T$ 使得 $\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$ 和

$$u(t, x + c't) \geq \frac{\delta}{4} \max \left\{ \left[e^{-\tilde{\lambda}_1 x} - e^{-\tilde{\lambda}_2 x} \right], 0 \right\}, \quad t \geq T, x \geq 0. \quad (3.89)$$

这表明对每一个 $c' \in (\max\{\frac{c_0 + \sigma'_2}{2}, 2\sqrt{1-a}\}, \sigma'_2)$ 有 $c_2 \geq c'$, 即, $c_2 \geq \sigma'_2$.

为此, 选择足够小的 $\delta_1 > 0$ 使得

$$\tilde{\lambda}_1 := \frac{1}{2} \left[c' - \sqrt{(c')^2 - 4(1-a - 2\delta_1)} \right] > \lambda_u. \quad (3.90)$$

它是可能的因为 $c' < \sigma'_2$ 和 $s \mapsto \frac{s - \sqrt{s^2 - 4(1-a)}}{2}$ 是单调的, 所以

$$\frac{1}{2} \left[c' - \sqrt{(c')^2 - 4(1-a)} \right] > \frac{1}{2} \left[\sigma'_2 - \sqrt{(\sigma'_2)^2 - 4(1-a)} \right] = \lambda_u.$$

接下来, 选择足够大的 $T > 0$ 使得

$$|h(t, x)| \leq \delta, \quad t \geq T, \quad x \geq c't, \quad (3.91)$$

和选择 $\delta \in (0, \delta_1]$ 使得

$$u(T, x) \geq \frac{\delta}{4} e^{-\tilde{\lambda}_1(x-c'T)}, \quad x \geq c'T, \quad (3.92)$$

其中 (3.91) 由于 (3.86) 且注意 $c' > c_0$; 和 (3.92) 成立是由于在 ∞ 上有 $u(T, x) \sim e^{-\lambda_u x}$ 和 $\tilde{\lambda}_1 > \lambda_u$ (参见, [96, 第一章的推论 1]). 通过 $\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$, δ, δ_1, T , 的选择, 有

$$\underline{u}(t, x) := \max \left\{ \frac{\delta}{4} \left[e^{-\tilde{\lambda}_1(x-c't)} - e^{-\tilde{\lambda}_2(x-c't)} \right], 0 \right\}, \quad (3.93)$$

是 KPP 方程

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + ru(1 - a - h(t, x) - u), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (3.94)$$

的下解, 其中 $\Omega := \{(t, x) : t \geq T, x \geq c't\}$.

对于 $\delta \in (0, \delta_1]$ 待以后指定, 定义

$$\underline{u}(t, x) := \max \left\{ \frac{\delta}{4} \left[e^{-\tilde{\lambda}_1(x-c't)} - e^{-\tilde{\lambda}_2(x-c't)} \right], 0 \right\}, \quad (3.95)$$

其中 $\tilde{\lambda}_1$ 是给定在 (3.90) 和 $\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{2} \left[c' + \sqrt{(c')^2 - 4(1 - a - 2\delta)} \right]$. 将选择 $T > 0$ 和 $\delta \in (0, \delta_1]$ 使得

$$\begin{cases} \partial_t \underline{u} - \partial_{xx} \underline{u} - \underline{u}(1 - a - h(t, x) - \underline{u}) \leq -\underline{u}(2\delta - h(t, x) - \underline{u}) \leq 0, & \Omega, \\ \underline{u}(t, c't) \geq 0 = \underline{u}(t, c't), & t \geq T, \\ \underline{u}(T, x) \geq \frac{\delta}{4} e^{-\tilde{\lambda}_1(x-c'T)} \geq \underline{u}(T, x), & x \geq c'T, \end{cases}$$

即, u 和 \underline{u} 是 KPP 方程

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + ru(1 - a - h(t, x) - u), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (3.96)$$

的一对上下解, 其中 $\Omega := \{(t, x) : t \geq T, x \geq c't\}$. 因此, 通过比较可知, (3.89) 成立.

进行进一步的, 正如在第 3.3 节, 基于伸缩变换 (3.13), 引入 WKB 变换 w_2^ϵ , 它由以下给定

$$w_2^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log u^\epsilon(t, x),$$

满足方程:

$$\begin{cases} \partial_t w_2^\epsilon - \epsilon \partial_{xx} w_2^\epsilon + |\partial_x w_2^\epsilon|^2 + 1 - u^\epsilon - av^\epsilon - h^\epsilon = 0, & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w_2^\epsilon(0, x) = -\epsilon \log u^\epsilon(0, x), & \mathbb{R}. \end{cases}$$

这里 $h^\epsilon(t, x) = h(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon})$. 由注记 3.3, 也利用半放松极限方法和引入 w_2^* 和 $w_{2,*}$. 由 (3.88), 有

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon(t, (\sigma'_2 - \eta)t) > 0,$$

和 u^ϵ 的上界是 1. 通过定义, 有

$$w_2^*(t, (\sigma'_2 - \eta)t) = w_{2,*}(t, (\sigma'_2 - \eta)t) = 0. \quad (3.97)$$

步骤 3. 证明 $\underline{c}_1 \geq \sigma_1$.

由 (3.88) 和 \underline{c}_1 的定义可得 $\underline{c}_1 \geq \sigma_1$.

步骤 4. 证明 $\underline{c}_2 \geq \hat{c}_{\text{nlp}}$.

由步骤 1 和 $h \geq 0$, 有

$$0 \leq \limsup_{\substack{(t', x') \rightarrow (t, x) \\ \epsilon \rightarrow 0}} v^\epsilon(t', x') \leq \chi_{\{x \leq \sigma_1 t\}}.$$

考虑到 $\sigma'_2 > c_0$, 选择 $0 < \eta \ll 1$ 使得 $\sigma'_2 - \eta > c_0$. 应用 (3.86) 我们得到

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{x \geq (\sigma'_2 - \eta)t} h^\epsilon(t, x) = 0.$$

基于 (3.97), 与引理 3.3 类似, 我们可推出 w_2^* 是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + |\partial_x w|^2 + 1 - a\chi_{\{x \leq \sigma_1 t\}}, w\} = 0, & x > (\sigma'_2 - \eta)t, \\ w(0, x) = \lambda_u x, & x \geq 0, \\ w(t, (\sigma'_2 - \eta)t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

的粘性下解.

然后通过构造相同的粘性上解应用引理 3.6 相同的证明推出 $\underline{c}_2 \geq \hat{c}_{\text{nlp}}$.

步骤 5. 证明 $\bar{c}_2 \leq \max\{c_{\text{LLW}}, \hat{c}_{\text{nlp}}\}$ 和 (3.87).

再次由 (3.86), 与推论 3.1 相似, 我们推出

$$\liminf_{\substack{(t', x') \rightarrow (t, x) \\ \epsilon \rightarrow 0}} v^\epsilon(t', x') \geq \chi_{\{\sigma_2 t < x < \sigma_1 t\}},$$

所以如引理 3.7 应用 (3.97) 推出 $w_{2,*}$ 是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + |\partial_x w|^2 + 1 - a\chi_{\{\sigma_2 t < x < \sigma_1 t\}}, w\} = 0, & x > (\sigma'_2 - \eta)t, \\ w(0, x) = \lambda_u x, & x \geq 0, \\ w(t, (\sigma'_2 - \eta)t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

粘性上解. 那么通过命题 3.2 的相同证明我们得到 $\bar{c}_2 \leq \max\{c_{LLW}, \hat{c}_{nlp}\}$. 最后如定理 3.1 相似的证明我们推出 (3.87), 因此完成了定理 3.4 的证明. \square

3.8 Hamilton-Jacobi 方程的比较原理

这节致力于证明不连续的粘性上下解和分段的 Lipschitz 连续的 Hamiltonian 的 Hamilton-Jacobi 方程的比较原理. 此证明受启发于在 Ishii [63] 和 Tourin [94] (也可参见 [4, 22, 44]) 里的证明. Ishii 使用了在 [4] 里的一个至关重要的观察去证明对不连续的上下解且非凸但连续的 Hamiltonian 的 Hamilton-Jacobi 方程的比较原理, 而 Tourin 给出了分段 Lipschitz 连续的 Hamiltonian 的 Hamilton-Jacobi 方程的唯一性. 对非线性一阶偏微分方程粘性解的唯一性首次由 Crandall 和 Lions [25] 提出的, 然后 Crandall, Ishii 和 Lions [27] 给出了一个更简单的证明. Ishii [62] 研究仅时间可测的不连续的 Hamiltonian 和 Tourin 和 Ostrov [85] 基于动力规划原理研究分段的 Lipschitz 连续的, 凸的 Hamiltonian.

假设 Ω 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^N$ 内是一个光滑的区域, 它可以是无界的或甚至就是 $(0, T] \times \mathbb{R}^N$. 不失一般性假设 $T = \sup\{t > 0 : (t, x) \in \Omega\}$, 和定义 Ω 的抛物边界为

$$\partial_p \Omega = \{(t, x) \in \partial \Omega : t \in [0, T)\}.$$

考虑下面 Hamilton-Jacobi 方程:

$$\min\{\partial_t w + H(t, x, \partial_x w), w - Lt\} = 0, \quad \Omega. \quad (3.98)$$

让 H^* 和 H_* 分别是 H 的上半连续 (usc) 和下半连续 (lsc) 的. 准确地说,

$$H^*(t, x, p) = \limsup_{(t', x') \rightarrow (t, x)} H(t', x', p), \quad H_*(t, x, p) = \liminf_{(t', x') \rightarrow (t, x)} H(t', x', p).$$

3.8.1 粘性解的定义

一个下半连续 (lsc) 的函数 w 是 (3.98) 的粘性上解如果在 Ω 上有 $w - Lt \geq 0$ 且对所有的试验函数 $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, 如果 $(t_0, x_0) \in \Omega$ 是 $w - \varphi$ 的一个严格的局部最小值点, 那么

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + H^*(t_0, x_0, \partial_x \varphi(t_0, x_0)) \geq 0$$

成立; 一个上半连续 (usc) 的函数 w 是 (3.98) 的粘性下解如果对所有的试验函数 $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, 如果 $(t_0, x_0) \in \Omega$ 是 $w - \varphi$ 的一个严格的局部最大值点且有 $w(t_0, x_0) - Lt_0 > 0$, 那么

$$\partial_t \varphi(t_0, x_0) + H_*(t_0, x_0, \partial_x \varphi(t_0, x_0)) \leq 0$$

成立. 最后, w 是 (3.98) 的粘性解当且仅当 w 既是 (3.98) 的粘性上解又是 (3.98) 的粘性下解.

Ω 和 $H : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 一些另外的假设. 换句话说, 存在一个闭集 $\Gamma \subset [0, T] \times \mathbb{R}^N$ 和对每一个 $R > 0$, 一个连续函数 $\omega_R : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 使得 $\omega_R(0) = 0$ 和对 $r > 0$ 有 $\omega_R(r) > 0$, 使得下面成立:

(A1) $H \in C((\Omega \setminus \Gamma) \times \mathbb{R}^N)$;

(A2) 对每一个 $(t_0, x_0) \in (\Omega \setminus \Gamma) \cap ((0, T) \times B_R(0))$, 对于 t, x, y, p , $\|(t, x) - (t_0, x_0)\| + \|(t, y) - (t_0, x_0)\| < \delta_0$ 和 $p \in \mathbb{R}^N$, 存在一个常数 $\delta_0 = \delta_0(R) > 0$, 使得

$$H(t, y, p) - H(t, x, p) \leq \omega_R(|x - y|(1 + |p|));$$

(A3) 对每一个 $(t_0, x_0) \in \Omega \cap \Gamma \cap ((0, T) \times B_R(0))$, 对所有的 $p \in \mathbb{R}^N$ 和 s, t, y, x 满足

$$\begin{cases} \|(t, x) - (t_0, x_0)\| + \|(s, y) - (t_0, x_0)\| < \delta_0, \\ \left\| \frac{(t-s, x-y)}{\|(t-s, x-y)\|} - (h_0, k_0) \right\| < \delta_0, \end{cases}$$

存在一个常数 $\delta_0 = \delta_0(R) > 0$ 和一个单位向量 $(h_0, k_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ 使得

$$H^*(s, y, p) - H_*(t, x, p) \leq \omega_R((|t - s| + |x - y|)(1 + |p|));$$

(A4) 存在某一 $M \geq 0$ 使得对每一个 $\lambda \in [0, 1)$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^N$, 对所有的 $p \in \mathbb{R}^N$, $(t, x) \in \Omega$, if $\epsilon \in [0, \bar{\epsilon}(\lambda, x_0)]$, 存在常数 $\bar{\epsilon}(\lambda, x_0) > 0$ 和 $\bar{C}(\lambda, x_0) > 0$, 如果 $\epsilon \in [0, \bar{\epsilon}(\lambda, x_0)]$, 那么

$$H\left(t, x, \lambda p - \frac{\epsilon(x - x_0)}{|x - x_0|^2 + 1}\right) - M \leq \lambda(H(t, x, p) - M) + \epsilon\bar{C}(\lambda, x_0).$$

定理 3.5 假设 H 满足 (A1)-(A4) 的假定. \bar{w} 和 \underline{w} 是 (3.98) 的一对粘性上下解且在 $\partial_p \Omega$ 上有 $\bar{w} \geq \underline{w}$, 那么

$$\bar{w} \geq \underline{w}, \quad \Omega.$$

注记 3.4

$$H(t, x, p) = \mathbf{H}(p) + R(x/t),$$

其中 \mathbf{H} 关于 p 是凸的和强制的, 和 $s \mapsto R(s)$ 是有界变差和对某些 $M \geq 0$ 满足 $|R(s)| \leq M$. 那么容易验证 (A1)-(A4) 成立. 尤其, 它可应用于本章和第四章.

假设 (A3) 等价于 [22] 的“局部单调条件”. 验证假设 (A1)-(A4) 更多的 *Hamiltonians* 的例子参见 [22, 63].

证明. 假设定理不成立, 则有

$$\sup_{\Omega} (\underline{w} - \bar{w}) > 0. \quad (3.99)$$

步骤 1. 不失一般性, 在 (A4) 假设中令 $M = 0$. 事实上, 如果做变量变换 $\underline{w}'(t, x) = \underline{w}(t, x) + Mt$ 和 $\bar{w}'(t, x) = \bar{w}(t, x) + Mt$, 那么 \underline{w}' , \bar{w}' 分别是将 (3.98) 里的 L 替换成 $L' = L + M$ 和 $H(t, x, p)$ 替换成 $H'(t, x, p) = H(t, x, p) - M$ 的下解和上解. 这个函数 H' 满足 (A1)-(A4) 的假设其 $M = 0$. 因此在证明过程中假设 (A4) 中 $M = 0$.

步骤 2. 对某一 $K > 0$ 在另外的假设下 $\underline{w} \leq K$ 足够证明 $\underline{w} \leq \bar{w}$.

如果在 Ω 内 \underline{w} 是无界的, 然后固定一个常数 $K > 0$ 和取光滑函数的序列 $\{g_j\}$ 满足 $g_j(r) \nearrow \min\{r, K\}$ 和对所有的 $r \in \mathbb{R}$ 有

$$0 \leq g'_j(r) \leq 1, \quad g'_j(r)r \leq r, \quad g_j(r) \leq \min\{r, K\}.$$

那么 $\hat{w} := g_j(\underline{w})$ 是 (3.98) 的粘性下解, 因为在 $\{(t, x) : \hat{w} - Lt > 0\} \subset \{(t, x) : w - Lt > 0\}$ 域中, 应用假设 (A4) 满足

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{w} + H^*(t, x, D\hat{w}) &= g'_k(\underline{w}) \partial_t \underline{w} + H^*(t, x, g'_k(\underline{w}) D\underline{w}) \\ &\leq g'_k(\underline{w}) [\partial_t \underline{w} + H^*(t, x, D\underline{w})] \leq 0. \end{aligned}$$

由粘性上下解的稳定性质 [1, 定理 6.2], $j \rightarrow \infty$ 时我们推出对每个 $K > 0$ 可知 $\min\{\underline{w}, K\}$ 是 (3.98) 的粘性下解. 现仍需证定理 3.5 粘性下解都是有上界的, 因为

$$\min\{\underline{w}, K\} \leq \bar{w}, \quad \text{对所有的 } K > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{w} \leq \bar{w}.$$

对 $\lambda, \delta \in (0, 1)$, 标记

$$W(t, x) = \lambda^2 \underline{w}(t, x) - \bar{w}(t, x) - \delta(\psi(x) + Ct + \frac{1}{T-t}) - \lambda\delta Ct,$$

其中 $\psi(x) = \frac{1}{2} \log(|x|^2 + 1)$ 和 $C = \bar{C}(\lambda, 0)$ 在假设 (A4) 给的.

步骤 3. 选择 $\lambda \nearrow 1$, $\delta \in (0, \bar{\epsilon}(\lambda, 0)]$, $R > 0$ 和 $(t_0, x_0) \in \Omega_R := \Omega \cap [(0, T) \times B_R(0)]$ 使得

$$W(t_0, x_0) = \max_{\Omega_R} W(t, x) = \max_{\Omega} W(t, x) > 0. \quad (3.100)$$

从 (3.99) 和步骤 3, 固定 $\lambda \nearrow 1$ 和 $\delta \searrow 0$ 使得

$$\sup_{\Omega} W(t, x) > 0, \quad W(t, x) \leq -\frac{\delta}{T-t}, \quad \partial_p \Omega.$$

因为当 $R \rightarrow \infty$ 时有 $\psi(R) \rightarrow \infty$ 和 $\underline{w} - \bar{w} \leq K$, 我们得到当 $R \rightarrow \infty$ 时有

$$\sup_{(t,x) \in \Omega: |x|=R} W(t, x) \rightarrow -\infty,$$

由此固定 $R \gg 1$ 所以 $\max_{\Omega_R} W(t, x) = \max_{\Omega} W(t, x) > 0$ 成立. 仍需注意在 $\bar{\Omega}_R$ 上最大值点 (t_0, x_0) 在内部达到, 因为当 $t = T$ 时 或当 $(t, x) \in \partial_p \Omega$ 时有 $W(t, x) < 0$.

步骤 4. x_0 由步骤 3 给定, 固定足够小的 $\epsilon > 0$ 以便于

$$\epsilon \bar{C}(\lambda, x_0) \leq \bar{C}(\lambda, 0), \quad \delta \epsilon \leq \bar{\epsilon}(\lambda, x_0), \quad (3.101)$$

和定义

$$\tilde{W}(t, x) := W(t, x) - \delta \lambda \epsilon \psi(x - x_0) - \frac{1}{2} |t - t_0|^2, \quad (3.102)$$

其中 $\psi(x) = \frac{1}{2} \log(|x|^2 + 1)$ 和 $C = \bar{C}(\lambda, 0)$ 是之前给定的. 那么, (t_0, x_0) 是 $\tilde{W}(t, x)$ 的严格全局最大值点. 定义

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha, \beta}(t, x, s, y) = & \lambda^2 \underline{w}(t, x) - \bar{w}(s, y) - \delta(\psi(x) + Ct + \frac{1}{T-t}) - \lambda \delta(\epsilon \psi(x - x_0) + Ct) \\ & - \frac{\alpha}{2} |x - y|^2 - \frac{\beta}{2} |t - s|^2 - \frac{1}{2} |t - t_0|^2. \end{aligned}$$

步骤 5. 称存在 $\underline{\alpha} > 0$ 使得如果 $\min\{\alpha, \beta\} \geq \underline{\alpha}$, 那么

- (i) $\Psi_{\alpha, \beta}$ 在 $\Omega_R \times \Omega_R$ 内有局部的最大值点 (t_1, x_1, s_1, y_1) ;
- (ii) $\Psi_{\alpha, \beta}(t_1, x_1, s_1, y_1) \geq \tilde{W}(t_0, x_0) = W(t_0, x_0) > 0$;
- (iii) $\min\{\alpha, \beta\} \rightarrow \infty, \beta |t_1 - s_1|^2 + \alpha |x_1 - y_1|^2 \rightarrow 0$;
- (iv) $\min\{\alpha, \beta\} \rightarrow \infty, (t_1, x_1) \rightarrow (t_0, x_0)$ 和 $(s_1, y_1) \rightarrow (t_0, x_0)$,

其中 $\Omega_R = \Omega \cap [(0, T) \times B_R(0)]$. 由步骤 2, 有 $\bar{w} \geq 0$ 和 $\underline{w} \leq K$, 我们可得 $\sup_{\Omega_R \times \Omega_R} \Psi_{\alpha, \beta} \leq K$, 其与 α 和 β 无关, 有一个最大值点 $(t_1, x_1, s_1, y_1) \in \bar{\Omega}_R \times \bar{\Omega}_R$. 由 (3.100), 有

$$\Psi_{\alpha, \beta}(t_1, x_1, s_1, y_1) \geq \max_{\Omega_R} \Psi_{\alpha, \beta}(t, x, t, x) = \tilde{W}(t_0, x_0) = W(t_0, x_0).$$

这证明了 (ii).

此外, 有界性使得 $\beta |t_1 - s_1|^2 + \alpha |x_1 - y_1|^2 = O(1)$. 称 $(t_1, x_1) \rightarrow (t_0, x_0)$ 和 $(s_1, y_1) \rightarrow (t_0, x_0)$. 取一个子序列得到 (\hat{t}, \hat{x}) 使得当 $\min\{\alpha, \beta\} \rightarrow \infty, (t_1, x_1) \rightarrow (\hat{t}, \hat{x})$ 和 $(s_1, y_1) \rightarrow (\hat{t}, \hat{x})$. 由 (ii), 有

$$\frac{\alpha}{2} |x_1 - y_1|^2 + \frac{\beta}{2} |t_1 - s_1|^2 \leq -\tilde{W}(t_0, x_0) + (\tilde{W}(t_1, x_1) + \bar{w}(t_1, x_1)) - \bar{w}(s_1, y_1).$$

让 $\min\{\alpha, \beta\} \rightarrow \infty$, 那么 $(t_1, x_1, s_1, y_1) \rightarrow (\hat{t}, \hat{x}, \hat{t}, \hat{x})$. 利用 $\tilde{W}(t, x) - \bar{w}(t, x)$ 和 $-\bar{w}(s, y)$ 在 Ω 都是上半连续的事实, 当 $\min\{\alpha, \beta\} \rightarrow \infty$ 时可取 \limsup 然后推出

$$0 \leq \limsup \left[\frac{\alpha}{2} |x_1 - y_1|^2 + \frac{\beta}{2} |t_1 - s_1|^2 \right] \leq -\tilde{W}(t_0, x_0) + \tilde{W}(\hat{t}, \hat{x}) \leq 0.$$

因为 (t_0, x_0) 是 \tilde{W} 的一个严格最大值点, 有 $(\hat{t}, \hat{x}) = (t_0, x_0)$. 这完成了 (iii) 和 (iv).

最后, 当 $\min\{\alpha, \beta\}$ 足够大时, $(t_1, x_1, s_1, y_1) \rightarrow (t_0, x_0, t_0, x_0)$, 因此在 $\Omega_R \times \Omega_R$ 内必须是内部点. 这证明了(i).

步骤 6. 证明下列不等式:

$$\frac{\delta}{T^2} \leq H^*(s_1, y_1, \alpha(x_1 - y_1)) - H_*(t_1, x_1, \alpha(x_1 - y_1)) + |t_1 - t_0|. \quad (3.103)$$

注意 (t_1, x_1) 是函数 $\underline{w}(t, x) - \varphi(t, x)$ 的内部极大值点, 其中

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) = & \frac{1}{\lambda^2} [\bar{w}(s_1, y_1) + \delta(\psi(x) + Ct + \frac{1}{T-t}) + \lambda\delta(\epsilon\psi(x-x_0) + Ct) \\ & + \frac{\alpha}{2}|x-y_1|^2 + \frac{\beta}{2}|t-s_1|^2 + \frac{1}{2}|t-t_0|^2]. \end{aligned}$$

并且 $\underline{w}(t_1, x_1) > 0$, 其是 $\bar{w}(s_1, y_1) \geq 0$ 和 $\Psi_\alpha(t_1, x_1, s_1, y_1) > 0$ 的结果. 由 \underline{w} 的定义是 (3.98) 的粘性下解, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda^2} \left[\delta \left(C + \frac{1}{(T-t_1)^2} + \lambda C \right) + \beta(t_1 - s_1) + (t_1 - t_0) \right] \\ & + H_* \left(t_1, x_1, \frac{1}{\lambda^2} (\delta D_x \psi(x_1) + \lambda \delta \epsilon D_x \psi(x_1 - x_0) + \alpha(x_1 - y_1)) \right) \leq 0, \end{aligned}$$

其重写为

$$\begin{aligned} & \delta \left(C + \frac{1}{T^2} + \lambda C \right) + \beta(t_1 - s_1) + (t_1 - t_0) \\ & + \lambda^2 H_* \left(t_1, x_1, \frac{1}{\lambda} (\delta \epsilon D_x \psi(x_1 - x_0) + \hat{q}) \right) \leq 0, \end{aligned} \quad (3.104)$$

其中 $\hat{q} = \frac{1}{\lambda} (\delta D_x \psi(x_1) + \alpha(x_1 - y_1))$. 考虑 $D\psi(x_1 - x_0) = \frac{x_1 - x_0}{|x_1 - x_0|^2 + 1}$, 利用假设 (A4) 我们推出

$$\begin{aligned} & -\delta \left(C + \frac{1}{T^2} + \lambda C \right) - \beta(t_1 - s_1) - (t_1 - t_0) \\ & \geq \lambda [H_*(t_1, x_1, \hat{q}) - \delta \epsilon \bar{C}(\lambda, x_0)] \\ & \geq \lambda H_* \left(t_1, x_1, \frac{1}{\lambda} (\delta D_x \psi(x_1) + \alpha(x_1 - y_1)) \right) - \lambda \delta C, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式利用 $\epsilon \bar{C}(\lambda, x_0) \leq \bar{C}(\lambda, 0) = C$ (由 (3.101)). 再一次应用假设 (A4), 有

$$\begin{aligned} & -\delta \left(C + \frac{1}{T^2} + \lambda C \right) - \beta(t_1 - s_1) - (t_1 - t_0) \\ & \geq [H_*(t_1, x_1, \alpha(x_1 - y_1)) - \delta C] - \lambda \delta C \\ & \geq H_*(t_1, x_1, \alpha(x_1 - y_1)) - \delta C - \lambda \delta C, \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\delta}{T^2} + \beta(t_1 - s_1) + (t_1 - t_0) + H_*(t_1, x_1, \alpha(x_1 - y_1)) \leq 0. \quad (3.105)$$

同样的方式, (s_1, y_1) 是函数 $\bar{w}(s, y) - \psi(s, y)$ 的内部极小值点且

$$\begin{aligned} \psi(s, y) = & \lambda^2 \underline{w}(t_1, x_1) - \delta(\psi(x_1) + Ct_1 + \frac{1}{T-t}) - \lambda\delta(\psi(x_1 - x_0) + Ct_1) \\ & - \frac{\alpha}{2}|x_1 - y|^2 - \frac{\beta}{2}|t_1 - s|^2 - \frac{1}{2}|t_1 - t_0|^2, \end{aligned}$$

因此

$$\beta(t_1 - s_1) + H^*(s_1, y_1, \alpha(x_1 - y_1)) \geq 0. \quad (3.106)$$

从 (3.106) 减去 (3.105), 我们推出 (3.103).

由步骤 5 (iv), 当 $\min\{\alpha, \beta\} \rightarrow \infty$ 时有 $(t_1, x_1) \rightarrow (t_0, x_0)$ 和 $(s_1, y_1) \rightarrow (t_0, x_0)$. 在一方面, 如果 $(t_0, x_0) \notin \Gamma$, 那么无论任何时候 $\min\{\alpha, \beta\} \geq \alpha_1$ 都存在 $\alpha_1 > 0$ 使得 (t_1, x_1) 和 (s_1, y_1) 进入 (t_0, x_0) 的 $(\delta_0/2)$ 邻域. 固定 α 和 $\beta \rightarrow \infty$ 时, 取一序列, 那么有

$$t_1, s_1 \rightarrow \bar{t}, \quad x_1 \rightarrow \bar{x}, \quad y_1 \rightarrow \bar{y}.$$

此外, 由步骤 5, 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 有

$$\bar{t} \rightarrow t_0, \quad \bar{x} \rightarrow x_0, \quad \bar{y} \rightarrow x_0, \quad \text{and} \quad \alpha|\bar{x} - \bar{y}|^2 \rightarrow 0. \quad (3.107)$$

因此, 从 (3.103) 和假设 (A2) 我们推出

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{T^2} & \leq H^*(\bar{t}, \bar{y}, \alpha(\bar{x} - \bar{y})) - H_*(\bar{t}, \bar{x}, \alpha(\bar{x} - \bar{y})) + |\bar{t} - t_0| \\ & \leq \omega_R \left(\alpha|\bar{x} - \bar{y}|^2 + \frac{1}{\alpha} \right) + o(1), \end{aligned}$$

当 α 足够大时我们可得到矛盾. 当 $(t_0, x_0) \in \Omega \setminus \Gamma$ 时证明了定理 3.5.

另一方面, $(t_0, x_0) \in \Gamma$. δ_0 和单位向量 $(h_0, k_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ 是在假设 (A3) 给定的. 定义

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\alpha, \beta}(t, x, s, y) = & \lambda^2 \underline{w}(t, x) - \bar{w}(s - \alpha^{-1/2}h_0, y - \alpha^{-1/2}k_0) \\ & - \delta(\psi(x) + Ct + \frac{1}{T-t}) - \lambda\delta(\epsilon\psi(x - x_0) + Ct) \\ & - \frac{\alpha}{2}|x - y|^2 - \frac{\beta}{2}|t - s|^2 - \frac{1}{2}|t - t_0|^2. \end{aligned} \quad (3.108)$$

通过重复步骤 5 和 6, 我们又一次得到

$$\frac{\delta}{T^2} \leq H^*(\bar{t} - \alpha^{-1/2}h_0, \bar{y} - \alpha^{-1/2}k_0, \alpha(\bar{x} - \bar{y})) - H_*(\bar{t}, \bar{x}, \alpha(\bar{x} - \bar{y})) + |\bar{t} - t_0| \quad (3.109)$$

对某 $\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}$ 使得对所有大的 α , $(\bar{t}, \bar{x}), (\bar{t}, \bar{y})$ 进入 (t_0, x_0) 的 $(\delta_0/2)$ 邻域和 (3.107) 成立. 此外, 通过验证

$$\begin{aligned} \frac{((\bar{t} - \alpha^{-1/2}h_0) - \bar{t}, \bar{y} - \alpha^{-1/2}k_0 - \bar{x})}{\|((\bar{t} - \alpha^{-1/2}h_0) - \bar{t}, \bar{y} - \alpha^{-1/2}k_0 - \bar{x})\|} &= -\frac{(\alpha^{-1/2}h_0, \bar{x} - \bar{y} + \alpha^{-1/2}k_0)}{\|(\alpha^{-1/2}h_0, \bar{x} - \bar{y} + \alpha^{-1/2}k_0)\|} \\ &= -\frac{(h_0, \sqrt{\alpha}(\bar{x} - \bar{y}) + k_0)}{\|(h_0, \sqrt{\alpha}(\bar{x} - \bar{y}) + k_0)\|} \\ &\rightarrow (h_0, k_0) \quad \text{as } \alpha \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

应用假设 (A3) 到不等式 (3.109) 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{T^2} &\leq \omega_R \left(\left[\alpha^{-1/2}(h_0 + |k_0|) + |\bar{x} - \bar{y}| \right] (1 + \alpha|\bar{x} - \bar{y}|) \right) + |\bar{t} - t_0| \\ &\leq \omega_R \left(|\bar{x} - \bar{y}| + \alpha|\bar{x} - \bar{y}|^2 + C_0(\sqrt{\alpha}|\bar{x} - \bar{y}| + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}) \right) + |\bar{t} - t_0|. \end{aligned}$$

让 $\alpha \rightarrow \infty$, 相似地, 我们推出矛盾. □

定理 3.5 的一个直接结果是下面唯一性的结果.

推论 3.2 假设 *Hamiltonian* H 满足 (A1)-(A4). 假设 (3.98) 有一个连续的粘性解 w . 那么, 在所有 (连续的) 粘性解的意义下 w 是 (3.98) 的唯一的粘性解.

第四章 三物种竞争系统的堆叠入侵波传播速度

4.1 假设和主要结果

生物入侵 (或者传播) 在生态学是基本的和重要研究的课题, 如 [89]. 迄今为止, 数学研究主要集中在单物种和双物种模型上, 在这些模型中, 物种入侵的传播速度的确定归因于潜在的动力系统的保序性. 本章主要研究完全耦合的三个竞争物种系统 (1.3), 难点在于此系统缺乏单调性, 无法应用比较原理.

4.1.1 前两个物种的传播速度

当 $u_3 \equiv 0$ 时, 系统 (1.3) 可归结为双物种竞争系统

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - d_1 \partial_{xx} u_1 = r_1 u_1 (1 - u_1 - a_{12} u_2), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t u_2 - \partial_{xx} u_2 = u_2 (1 - a_{21} u_1 - u_2), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u_i(0, x) = u_{i,0}(x), & \mathbb{R}, i = 1, 2. \end{cases} \quad (4.1)$$

当 $a_{21} < 1 < a_{12}$ (即第二个物种竞争强于第一个), 和 $u_{1,0}$ 和 $1 - u_{2,0}$ 都是非负的, 紧的且上界为 1, 由 Li 等 [71] 的经典传播结果表明存在唯一的 $\hat{c}_{LLW} \in [2\sqrt{1 - a_{21}}, 2]$ 使得 u_2 以 \hat{c}_{LLW} 的速度入侵 u_1 , 即

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (\hat{c}_{LLW} + \eta)t} (|u_1(t, x) - 1| + |u_2(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x < (\hat{c}_{LLW} - \eta)t} (|u_1(t, x)| + |u_2(t, x) - 1|) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

此外, \hat{c}_{LLW} 与系统 (4.1) 的连接 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 存在的行波解的最小波速相同. 对系统 (4.1) 在被入侵的平衡点 $(1, 0)$ 上进行线性化, 表明 $\hat{c}_{LLW} \geq 2\sqrt{1 - a_{21}}$.

当 $\hat{c}_{LLW} = 2\sqrt{1 - a_{21}}$ 时, 此时传播速度 \hat{c}_{LLW} 是线性确定的. 在这种情形下, 所产生的入侵波是一种 “pulled wave”, 即入侵种群受到前沿种群增长刺激. 当 $\hat{c}_{LLW} > 2\sqrt{1 - a_{21}}$ 时, 此时传播速度 \hat{c}_{LLW} 是非线性确定的. 在这种情形下, 由此产生的入侵波是一种 “pushed wave”, 也就是说, 入侵是由种群的所有组成部分推动的. 因此, “pushed wave” 是一种机制, 可以加速紧支集种群的入侵. “Pushed wave” 的一个信号是它在 $x = \infty$ 处的快速指数衰减 [3, 86].

当这两个物种入侵空白的栖息地时, 另一种加快速度的机制就会生效. 即当 $u_{1,0}$ 和 $u_{2,0}$ 都是紧支集时. Shigesada 和 Kawasaki [89] 提出了这个问题, 因为他们认为在最后一个冰河时代末期 (约 1.6 万年前) 有两种或两种以上的树种入侵北美大陆 [28]. Lin 和 Li [73] 首先考虑了双物种竞争的情况, 在 [47] 中通过构造全局上下解, 完全解决了初值为紧支集的情形. 也可参见 [68] 得到了整体解的存在性, 当 $t \rightarrow \infty$ 时他们是堆叠波. 对两个物种系统而言, (4.4) 变成

$$d_1 r_1 > 1 \quad \text{和} \quad a_{21} < 1 < a_{12}. \quad (4.3)$$

第一个条件表明, 在缺乏竞争下, u_1 传播快于 u_2 . 第二个条件表明 u_2 竞争强于 u_1 .

定理 4.1 ([47]) 假设 (4.3) 成立. $(u_i)_{i=1}^2$ 是 (4.1) 的解其紧支集初值是非负和非平凡的. 那么对每一个小的 $\eta > 0$, 下面的传播结果成立:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (c_1 + \eta)t} (|u_1(t, x)| + |u_2(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_2 + \eta)t < x < (c_1 - \eta)t} (|u_1(t, x) - 1| + |u_2(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x < (c_2 - \eta)t} (|u_1(t, x)| + |u_2(t, x) - 1|) = 0. \end{cases}$$

这里传播速度为 $c_1 = 2\sqrt{d_1 r_1}$ 和

$$c_2 = \begin{cases} \max \left\{ \hat{c}_{\text{LLW}}, \frac{c_1}{2} - \sqrt{a_{21}} + \frac{1 - a_{21}}{c_1/2 - \sqrt{a_{21}}} \right\}, & \text{如 } c_1 < 2(\sqrt{a_{21}} + \sqrt{1 - a_{21}}), \\ \hat{c}_{\text{LLW}}, & \text{否则,} \end{cases}$$

其中 $\hat{c}_{\text{LLW}} \in [2\sqrt{1 - a_{21}}, 2]$ 由 (4.2) 给定的传播速度.

由 (4.3), 注意到 $c_1 > 2$. 当 $c_1 = 2\sqrt{d_1 r_1} \searrow 2$ (如通过改变 r_1), 第二个物种的速度接近 2, 其大于 \hat{c}_{LLW} . 这种速度增强机制由 Holzer 和 Scheel [53] 在 $a_{12} = 0$ 时首次发现 (在这种情形下 (4.1) 解耦). 在 [47] 中, 它被称为一种 “nonlocally pulled wave”: 由于 c_2 依赖于 c_1 , 它被称为 ‘nonlocally’, 由于它是缓慢衰减的, 所以它被认为是一种 “pulled wave” (进一步讨论请参见第二章). 弱竞争 ($0 < a_{12}, a_{21} < 1$) 情形, 随后在第二, 三章中得到解的渐近估计. 一个重要的观察是, 快速移动的波可以影响较慢移动的波, 但反之则不然. 这使我们能够从最快的到最慢的分别估计每个入侵波. 与 [47] 相比, 所有的速度都是由一对单一的全局上下解一次性决定的, 这个新的观点打开了分析更一般的非合作系统的大门.

本章我们感兴趣的是三物种竞争系统 (1.3), 满足竞争层次必要条件:

$$d_3 r_3 < 1 < d_1 r_1, \quad a_{21} < 1 < a_{12} \quad \text{和} \quad a_{31} + a_{32} < 1, \quad (4.4)$$

这表明物种 u_1, u_2, u_3 从快到慢的顺序传播, 且在缺少 u_3 下 u_2 能竞争性地排除 u_1 , 但是两者最终会被 u_3 入侵. 假设 (4.4). 并初值满足以下条件之一.

(H_∞) 对 $i = 1, 2, 3, u_{i,0} \in C(\mathbb{R}; [0, 1])$ 是非空的紧支集.

(H_λ) 对 $i = 1, 2, u_{i,0} \in C(\mathbb{R}; [0, 1])$ 是非空的紧支集. 和初值 $u_{3,0} \in C(\mathbb{R}; [0, 1])$ 满足 $u_{3,0}(x) > 0$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}$, 和对某一 $\lambda \in (0, \infty)$ 有

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} u_{3,0}(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} u_{3,0}(x) < \infty.$$

为了便于讨论, 我们将本章 u_i 的最大和最小传播速度介绍如下 (单个物种的相关概念见[50, 定义 1.2]):

$$\begin{cases} \bar{c}_i = \inf \{c > 0 \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > ct} u_i(t, x) = 0\}, \\ \underline{c}_i = \sup \{c > 0 \mid \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{ct-1 < x < ct} u_i(t, x) > 0\}, \end{cases} \quad \text{对 } i = 1, 2, 3.$$

注意到 $\bar{c}_i \geq \underline{c}_i$. 此外, 物种 u_i 在 [5, 6] 意义上有传播速度 c_i 当且仅当 $c_i = \bar{c}_i = \underline{c}_i$. 与传播速度不同, 这些最大最小速度是预先定义的, 并且更容易估计.

不失一般性, 假设 u_3 是最慢的物种. 观察到较慢的波不影响较快的波, 据此两个较快物种的传播速度可由 [47] 或第二、三章确定. 为了说明这个定理, 定义“nonlocally pulled wave”的速度:

$$\hat{s}_{\text{nlp}}(c_1) := \begin{cases} \frac{c_1}{2} - \sqrt{a_{21}} + \frac{1-a_{21}}{2-\sqrt{a_{21}}}, & c_1 \leq 2(\sqrt{a_{21}} + \sqrt{1-a_{21}}), \\ 2\sqrt{1-a_{21}}, & \text{否则.} \end{cases} \quad (4.5)$$

(注意 $\hat{s}_{\text{nlp}} \in [2\sqrt{1-a_{21}}, 2]$.)

定理 4.2 假设 (4.4) 成立和 $\hat{c}_{\text{LLW}} = 2\sqrt{1-a_{21}}$ (即 \hat{c}_{LLW} 是线性确定的). $(u_i)_{i=1}^3$ 是 (1.3) 的解使得下面条件其中一个成立:

(i) (H_∞) 成立且 $2\sqrt{d_3 r_3} < \hat{s}_{\text{nlp}}(2\sqrt{d_1 r_1})$; 或者

(ii) (H_λ) 成立对某些 $\lambda \in (0, \infty)$, 和 $\sigma_3(\lambda) < \hat{s}_{\text{nlp}}(2\sqrt{d_1 r_1})$, 其中

$$\sigma_3(\lambda) := \begin{cases} d_3 \lambda + \frac{r_3}{\lambda}, & 0 < \lambda < \sqrt{r_3/d_3}, \\ 2\sqrt{d_3 r_3}, & \lambda \geq \sqrt{r_3/d_3}. \end{cases} \quad (4.6)$$

那么, $c_1 = 2\sqrt{d_1 r_1}$ 和 $c_2 = \hat{s}_{\text{nlp}}(2\sqrt{d_1 r_1})$, 有 $c_1 > c_2 > \sigma_3(\lambda) \geq \bar{c}_3$. 此外, 对每一小的 $\eta > 0$, 前两个物种传播性质满足

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (c_1 + \eta)t} (|u_1(t, x)| + |u_2(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_2 + \eta)t < x < (c_1 - \eta)t} (|u_1(t, x) - 1| + |u_2(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\bar{c}_3 + \eta)t < x < (c_2 - \eta)t} (|u_1(t, x)| + |u_2(t, x) - 1|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (\bar{c}_3 + \eta)t} |u_3(t, x)| = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

定理 4.2 是第三章的定理 3.4 的一个直接应用因此忽略的证明. 因此, 我们可把问题简化为确定最慢物种的速度.

注记 4.1 由 [69, 定理 2.1], 对 $\hat{c}_{\text{LLW}} = 2\sqrt{1 - a_{21}}$ 的一个充分条件为 $d_1 = 1$, $a_{21} < 1 < a_{12}$, 和 $a_{21}a_{12} < \max\{1, 2(1 - a_{21})\}$. (也可参见 [3, 59].) 然而, 线性确定的假设只是为了简单起见. 事实上, 通过在结论中替换 $c_2 = \max\{\hat{s}_{\text{nlp}}, \hat{c}_{\text{LLW}}\}$, 可以消除这个假设.

定义 4.1 给定 $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ 和 $\lambda \in (0, \infty]$. 我们说 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立如果

- (i) $c_1 > c_2 > \sigma_3(\lambda)$,
- (ii) $(u_i)_{i=1}^3$ 是 (1.3) 的解其初值满足 (H_λ) , 和
- (iii) 传播条件 (4.7) 成立.

定理 4.2 的结论可以重新表示为 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 满足 $c_1 = 2\sqrt{d_1 r_1}$, 和对某一 $\lambda \in (0, \infty]$ 有 $c_2 = \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1)$.

注意到当 u_3 的指数衰减为 λ 时, 定义在 (4.6) 里的 $\sigma_3(\lambda)$, 是 u_3 的传播速度的上界. 因此 (i) 意味着这三个物种是按照从最快到最慢的顺序排列的.

4.1.2 第三个物种的传播速度

下面假设对某些 c_1, c_2, λ 使得 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立, 并根据前两个物种的传播速度推出第三个物种传播速度 c_3 的上界和下界估计. 此外, 将证明, 如果 u_3 的入侵波是“nonlocally pulled wave”, 此估计是最佳的.

为此, 我们引入速度 $s_{\text{nlp}} = s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 作为 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解的自由边界点.

定义 4.2 给定 $c_1 > c_2 > 0$ 和 $\lambda \in (0, \infty]$, $\rho_{\text{nlp}} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是下面 Hamilton-Jacobi 方程

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + \mathcal{R}(s), \rho\} = 0, & (0, \infty), \\ \rho(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho(s)}{s} = \lambda, \end{cases} \quad (4.8)$$

的唯一粘性解, 其中 $\mathcal{R}(s) = r_3(1 - a_{31}\chi_{\{c_2 < s \leq c_1\}} - a_{32}\chi_{\{s \leq c_2\}})$ 和 χ_S 是集合 S 的指示函数. 对粘性解的定义可参见定义 4.4. 定义速度 $s_{\text{nlp}} = s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 作为边界点, 由如下

$$s_{\text{nlp}} = \sup\{s : \rho_{\text{nlp}}(s) = 0\}, \quad (4.9)$$

给定.

注记 4.2 s_{nlp} 是好的定义因为 $\rho_{\text{nlp}}(s)$ 关于 s 是非负和非递减 (参见引理 4.6). 当 $a_{31} = a_{32} = 0$ 的特殊情形时物种 u_3 可以作为单个物种传播, 不难知道当 $u_{3,0}$ 是紧支集, 即 $\lambda = \infty$,

$$\rho_{\text{nlp}}(s) = \max\left\{\frac{s^2}{4d_3} - r_3, 0\right\} \quad \text{和} \quad s_{\text{nlp}} = 2\sqrt{d_3 r_3};$$

且当 $\lambda \in (0, \sqrt{r_3/d_3})$,

$$\rho_{\text{nlp}}(s) = \max\left\{\lambda\left(s - d_3\lambda - \frac{r_3}{\lambda}\right), 0\right\} \quad \text{和} \quad s_{\text{nlp}} = d_3\lambda + \frac{r_3}{\lambda}.$$

当指数衰减率 λ 为次临界时, 这个即为初值为紧支集的单一物种的经典 Fisher-KPP (局部拉) 波速度, 并得到了 [95] 的结果.

注记 4.3 下面结果将会在引理 4.7 和命题 4.7 里证明.

(i) $2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{32})} \leq s_{\text{nlp}} \leq \sigma_3(\lambda)$, 其中 $\sigma_3(\lambda)$ 是定义在 (4.6).

(ii) 如果 $a_{31} < a_{32}$ 和 $2\sqrt{d_3 r_3} < c_2 < c_1 < 2\sqrt{d_3 r_3}(\sqrt{a_{32}} + \sqrt{1 - a_{32}})$, 那么

$$s_{\text{nlp}} > 2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{32})}.$$

同时引入速度 c_{LLW} , 这归应于 Kan-on [66].

定义 4.3 设 c_{LLW} 是行波解 (即 $(u, v) = (\varphi(x - ct), \psi(x - ct))$)

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = u(1 - a_{21} - u - a_{23}v), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_t v - d_3 \partial_{xx} v = r_3 v(1 - a_{32}u - v), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.10)$$

的最小波速使得 $\lim_{\xi \rightarrow \infty} (\varphi, \psi)(\xi) = (1 - a_{21}, 0)$ 和 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\varphi, \psi)(\xi) = (u^*, v^*)$, 其中 (u^*, v^*) 是唯一稳定的常数平衡态且 $v^* > 0$.

注记 4.4 众所周知 $c_{\text{LLW}} \in [2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21}))}, 2\sqrt{d_3 r_3}]$. 此外, $c_{\text{LLW}} = 2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21}))}$ 如果 (参见引理 4.15 和 [69, 定理 2.1])

$$d_3 \geq \frac{1}{2}, \quad a_{32}(1 - a_{21}) < 1 < \frac{a_{23}}{1 - a_{21}} \quad \text{和} \quad a_{32}a_{23} < 1.$$

现在我们阐述本章的主要定理.

定理 A 假设竞争层次条件 (4.4), 和加上,

$$d_1 = 1 \quad \text{和} \quad a_{31}a_{12} \leq a_{32}. \quad (4.11)$$

$(u_i)_{i=1}^3$ 是 (1.3) 的解且对某些 $c_1 > c_2 > 0$ 和 $\lambda \in (0, \infty]$ 有 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立. 那么最大最小速度 $\bar{c}_3, \underline{c}_3$ 可以由以下估计.

$$2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{31} - a_{32})} \leq \underline{c}_3 \leq \bar{c}_3 \leq \max\{s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda), c_{\text{LLW}}\} < c_2. \quad (4.12)$$

此外, 对每一个小的 $\eta > 0$, 下面的传播结果成立:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > (c_1 + \eta)t} (|u_1(t, x)| + |u_2(t, x)| + |u_3(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_2 + \eta)t < x < (c_1 - \eta)t} (|u_1(t, x) - 1| + |u_2(t, x)| + |u_3(t, x)|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(\bar{c}_3 + \eta)t < x < (c_2 - \eta)t} (|u_1(t, x)| + |u_2(t, x) - 1| + |u_3(t, x)|) = 0, \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq x < (c_3 - \eta)t} u_3(t, x) > 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

如果, 加上, $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda) \geq c_{\text{LLW}}$, 那么 u_3 的传播速度可以全由

$$c_3 = \bar{c}_3 = s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda), \quad (4.14)$$

确定.

注记 4.5 (i) 条件 (4.11) 是必须的去确保 (参见命题 4.8)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{(c_2 - \eta)t < x < (c_2 + \eta)t} (a_{31}u_1(t, x) + a_{32}u_2(t, x)) \geq \min\{a_{31}, a_{32}\},$$

也就是说当 u_2 侵占 u_1 时没有 u_3 可以利用的机会. 进一步讨论见注记 4.13.

(ii) 条件 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda) \geq c_{\text{LLW}}$ 对某些 $\lambda \in (0, \infty]$ 总是满足的.

当定理 A 所有的假设, 包括 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$, 可以被验证时, 请参阅推论 4.1 和命题 4.1 可作为两个实例.

我们确定 u_3 在最终区域 $\{(t, x) : 0 < x < \underline{c}_3 t\}$ 的渐近行为.

定理 B 假设 $(u_i)_{i=1}^3$ 是 (1.3) 且初值为 $u_{3,0} \not\equiv 0$ 的解. 假设 $a_{13}, a_{23} > 1$ 和 (4.4) 成立. 那么 $\underline{c}_3 \geq 2\sqrt{d_3 r_3} \sqrt{1 - a_{31} - a_{32}}$, 和每一小的 $\eta > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 < x < (\underline{c}_3 - \eta)t} (|u_1(t, x)| + |u_2(t, x)| + |u_3(t, x) - 1|) = 0. \quad (4.15)$$

假设 (4.4) 和 $a_{13}, a_{23} > 1$ 意味着物种 u_3 对于 u_1, u_2 而言是强竞争的, 且因此最终入侵和使得物种 u_1, u_2 灭绝. 在子节 4.1.3 中的数值说明, 条件 $a_{13}, a_{23} > 1$ 可能是确保 (4.15) 的最佳条件.

下面的结果给出了速度 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 的显式表达式. 证明在 4.8 节.

定理 C s_{nlp} 是对任意给定的 $c_1 > c_2 > 0$ 和 $\lambda \in (0, \infty]$ 定义在 (4.9) 上的. 那么

$$s_{\text{nlp}} = \begin{cases} d_3 \lambda_{\text{nlp}1} + \frac{r_3(1-a_{32})}{\lambda_{\text{nlp}1}}, & \zeta_1 > \frac{c_2}{2d_3}, a_{31} < a_{32}, \text{ 和 } \lambda_{\text{nlp}1} \leq \sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}}, \\ \begin{cases} d_3 \lambda_{\text{nlp}2} + \frac{r_3(1-a_{32})}{\lambda_{\text{nlp}2}}, & \left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 \leq \frac{c_2}{2d_3}, \lambda_{\text{nlp}2} \leq \sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}} \text{ 和} \\ \text{(i) } a_{31} < a_{32} \text{ 或} \\ \text{(ii) } a_{31} \geq a_{32} \text{ 和 } \zeta_1 + \zeta_2 < \frac{c_2}{d_3}, \end{array} \right. \\ 2\sqrt{d_3 r_3(1-a_{32})}, & \text{否则,} \end{cases} \end{cases} \quad (4.16)$$

其中

$$\begin{cases} \zeta_1 = \begin{cases} \frac{c_1}{2d_3} - \sqrt{\frac{r_3 a_{31}}{d_3}}, & \lambda \geq \frac{c_1}{2d_3}, \\ \frac{c_1}{2d_3} - \frac{\sqrt{(c_1 - 2d_3 \lambda)^2 + 4d_3 r_3 a_{31}}}{2d_3}, & \lambda < \frac{c_1}{2d_3}, \end{cases} \\ \zeta_2 = \frac{c_2}{2d_3} + \sqrt{\frac{r_3(a_{31} - a_{32})}{d_3}}, \\ \lambda_{\text{nlp}1} = \frac{c_2}{2d_3} - \sqrt{\frac{r_3(a_{32} - a_{31})}{d_3}}, \\ \lambda_{\text{nlp}2} = \frac{c_2 - \sqrt{(c_2 - 2d_3 \zeta_1)^2 + 4d_3 r_3 (a_{32} - a_{31})}}{2d_3}. \end{cases} \quad (4.17)$$

我们简要讨论本章与其他工作 [47] 和第二、三章的区别. 在 [47] 中, 双物种系统 (4.1) 生成了一个单调的动力系统, 从而通过构造单对弱上下解, 并在整个区域 $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 应用比较原理得到结果. 在第二、三章中, 通过分析 Hamilton-Jacobi 方程所满足的函数 $w_2(t, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\epsilon \log u\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right)$ 的极限, 我们获得 u 沿着射线 $\{(t, x) : x = c_1 t\}$ 的渐近行为, 其在紧支集的初值下有

$$u(t, c_1 t) = \exp(-(\mu_0 + o(1))t), \quad \text{其中 } \mu_0 = \left(\frac{c_1}{2} - \sqrt{a_{21}}\right)(c_1 - \hat{s}_{\text{nlp}}),$$

其中 $c_1 = 2\sqrt{d_1 r_1}$ 和 \hat{s}_{nlp} 由 (4.5) 给定. 因此, 我们可应用边界条件

$$(u, v)(0, t) \rightarrow (1, 0), \quad (u, v)(t, c_1 t) \rightarrow (0, 1) \quad \text{和} \quad u(t, c_1 t) \sim e^{-\mu_0 t}, \quad t \gg 1,$$

将方程 (1.2) 限制在扇形区域 $\{(t, x) : 0 \leq x \leq c_1 t\}$. 因此, 仅与行波解进行比较就足以确定速度 c_2 .

处理三个物种竞争系统 (1.3) 的主要困难在于, 对于最慢物种 u_3 的传播速度, 整个系统缺乏单调性. 我们的第一个想法是在第二种和第三种物种之间使用子系统 (4.10) 来从上面估计 c_3 . 然而, (4.10) 不是最优的, 因为我们在 (4.10) 的第一个方程令 $u_1 \equiv 1$ 和 (4.10) 的第二个方程令 $u_1 \equiv 0$, 而它应该在“正确的”系统中保持 $u_1 \approx \chi_{\{c_2 t < x < c_1 t\}}$. 事实上, 当 $a_{21} > 0$ 时, (4.10) 的行波解总是高估 c_3 . 同样地, 此时我们试图从下面估计 c_3 时, $a_{31} > 0$ 也会带来麻烦. (当它们中的任何一个足够小时, c_3 可精确地确定, 参见推论 4.1 和命题 4.1.)

我们的第二个想法是直接估计 $w_3(t, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\epsilon \log u_3\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right)$, 证明对 $x/t > \max\{c_{\text{LLW}}, s_{\text{nlp}}\}$ 有 $w_3(t, x) > 0$, 相当于 $\bar{c}_3 \leq \max\{c_{\text{LLW}}, s_{\text{nlp}}\}$. 虽然这不能通过单一的比较来实现, 但是我们可利用第二个物种 u_2 来控制第一个物种 u_1 , 并且使用递归方法来逐步改进估计. 定理 A 进一步表明, 在 $s_{\text{nlp}} \geq c_{\text{LLW}}$ 的情况下, 估计 (4.12) 是最佳的.

一个特定的实例当 a_{21} 很小, 而其他参数 d_i, r_i, a_{ij} 固定且满足

$$d_1 = 1, \quad a_{12} > 1, \quad a_{32} \leq \frac{1}{2}, \quad a_{31} \leq \frac{a_{32}}{a_{12}}, \quad (4.18)$$

$$d_3 \geq \frac{1}{2}, \quad a_{13} > 1, \quad 1 < a_{23} < \frac{1}{a_{32}}, \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{\sqrt{d_3}(\sqrt{a_{32}} + \sqrt{1 - a_{32}})} < \sqrt{r_3} < \frac{1}{\sqrt{d_3}}, \quad 1 < \sqrt{r_1} < \sqrt{d_3 r_3}(\sqrt{a_{32}} + \sqrt{1 - a_{32}}). \quad (4.20)$$

时, 我们可完全确定 u_3 的传播速度.

注记 4.6 满足 (4.18)-(4.20) 的参数集是非空的. 实际上, 可以按以下顺序选择 d_i, r_i, a_{ij} : 由 (4.18) 确定 $d_1, a_{12}, a_{32}, a_{31}$, 然后由 (4.19) 确定 d_3, a_{13}, a_{23} , 最后由 (4.20) 确定 r_1 和 r_3 .

推论 4.1 除 a_{21} 外固定所有参数, 满足 (4.18)-(4.20). 那么存在 $\delta > 0$ 使得对所有 $a_{21} \in [0, \delta)$, (1.3) 的解其初值满足 (4.13), (4.14) 和 (4.15), 有

$$c_1 = 2\sqrt{d_1 r_1}, \quad c_2 = 2\sqrt{1 - a_{21}}, \quad \bar{c}_3 = \underline{c}_3 = s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \infty).$$

证明. 由 $a_{31} < a_{32}$ (由 (4.18)) 和 (4.20) 的第二部分, 应用注记 4.3(ii) 去证明 $s_{\text{nlp}} > 2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{32})}$ (在命题 4.7 里证明), 其中 $s_{\text{nlp}} = s_{\text{nlp}}(2\sqrt{d_1 r_1}, 2\sqrt{1 - a_{21}}, \infty)$. 通过取 a_{21} 充分小, 进一步假设

$$a_{12} a_{21} < 1, \quad 2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21}))} < s_{\text{nlp}}, \quad (4.21)$$

和

$$a_{32}(1 - a_{21}) < 1 < \frac{a_{23}}{1 - a_{21}}, \quad \sqrt{d_3 r_3} < \sqrt{1 - a_{21}}, \quad \sqrt{a_{21}} + \sqrt{1 - a_{21}} < \sqrt{r_1}. \quad (4.22)$$

接下来注意到 (4.4) 和 (4.11) 是 $a_{21} \in (0, 1)$ 和 (4.18) 的结果.

有 $\hat{c}_{\text{LLW}} = 2\sqrt{1 - a_{21}} = \hat{s}_{\text{nlp}}(2\sqrt{d_1 r_1})$. 第一个等式由 $d_1 = 1, a_{21} < 1 < a_{12}$ 和注记 4.1 里的 $a_{12} a_{21} < 1$ 得到. 第二个等式归应于 $d_1 = 1, (4.22)$ 的第二个部分和 (4.5). 结合 (4.22) 的中间部分, 有

$$2\sqrt{d_3 r_3} < 2\sqrt{1 - a_{21}} = \hat{s}_{\text{nlp}}(2\sqrt{d_1 r_1}) \quad \text{和} \quad \hat{c}_{\text{LLW}} = 2\sqrt{1 - a_{21}}.$$

因此, 我们应用定理 4.2 得到 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立, 其中

$$c_1 = 2\sqrt{d_1 r_1}, \quad c_2 = \max\{\hat{s}_{\text{nlp}}, \hat{c}_{\text{LLW}}\} = 2\sqrt{1 - a_{21}}, \quad \lambda = \infty.$$

在验证了 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$, (4.4), 和 (4.11) 之后, 应用定理 A. 假设

$$s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \infty) \geq c_{\text{LLW}}, \quad (4.23)$$

那么第三个物种的传播速度可以由 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \infty)$ 唯一确定. 同时因为 $a_{13} > 1$ 和 $a_{23} > 1$, 应用定理 B 我们推出 u_3 入侵最终区域时 $(u_1, u_2, u_3) \approx (0, 0, 1)$.

仍需证明 (4.23). 为此, 首先声明 $c_{\text{LLW}} = 2\sqrt{d_3 r_3} \sqrt{1 - a_{32}(1 - a_{21})}$. 这是因为 $d_3 > 1/2$, $a_{32}(1 - a_{21}) < 1 < \frac{a_{23}}{1 - a_{21}}$, 和 $a_{32}a_{23} < 1$. 参见引理 4.15.

结合 $c_{\text{LLW}} = 2\sqrt{d_3 r_3} \sqrt{1 - a_{32}(1 - a_{21})}$ 和 (4.21) 的第二个部分, 我们得到 (4.23). 这完成了证明. \square

推论 4.1 参数的条件能进一步放松, 如果我们允许 u_3 有指数衰减.

命题 4.1 假设竞争层次条件 (4.4) 和 (4.11) 成立, 和

$$d_3 \geq \frac{1}{2}, \quad a_{12}a_{21} < 1, \quad 2\sqrt{d_3 r_3} < \hat{s}_{\text{nlp}}(2\sqrt{d_1 r_1}), \quad a_{13} > 1, \quad a_{23} > 1. \quad (4.24)$$

那么存在 $\lambda \in (0, \infty]$ 和 $\delta > 0$ 使得对任意 (1.3) 的解其初值满足 (H_λ) , 和 $a_{31} \in [0, \delta]$, 结论 (4.13), (4.14), 和 (4.15) 成立其中

$$c_1 = 2\sqrt{d_1 r_1}, \quad c_2 = \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1), \quad \bar{c}_3 = c_3 = s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda),$$

其中 $\hat{s}_{\text{nlp}}(c_1)$ 由 (4.5) 给定.

除了要求 a_{31} 小, 这里我们只需要技术条件 $d_3 \geq 1/2$, (4.11), 和 $a_{21}a_{12} < 1$. 参数的所有其他条件都是自然的. 命题 4.1 的证明被推迟到 4.5 节.

4.1.3 数值模拟

本小节给出系统 (1.3) 其初值为紧支集的一些数值结果来说明我们的主要结果.

在第一个数值结果中, 我们模拟 u_3 的速度来说明定理 A. 系统 (1.3) 的参数, 除了 a_{21} , 都是固定的如 $r_1 = 1.08$, $d_1 = 1$, $r_3 = 1.1$, $d_3 = 0.6$, $a_{12} = 1.2$, $a_{31} = 0.1$, $a_{13} = 1.1$, $a_{32} = 0.4$, $a_{23} = 1.1$. 可以直接验证 (4.18)-(4.20) 是满足的.

首先, 取 $a_{21} = 0.01$, 然后可知 $c_{LLW} = 2\sqrt{d_3 r_3} \sqrt{1 - a_{32}(1 - a_{21})} = 1.2628$, 因为对所选的参数 c_{LLW} 线性确定的. 我们应用二阶有限差分格式离散区域 $[x, t]$, 使用隐式欧拉格式数值求解系统 (1.3). 注意小的 $a_{21} = 0.01$, u_3 的传播速度可以完全由 $c_3 = s_{nlp} > c_{LLW}$ (推论 4.1) 决定. 这与图 4.1 中的数值结果一致, 说明在这种情形下, 定理 A 中的估计 (4.12) 是最佳的. 但是, 如果取 $a_{21} = 0.5$ 较大时, 由 s_{nlp} 和 c_{LLW} 的表达式可知 $s_{nlp} < c_{LLW}$, 以致推论 4.1 不再适用, 则在图 4.1 中显示 $c_3 < c_{LLW}$, 其中 $c_{LLW} = 2\sqrt{d_3 r_3} \sqrt{1 - a_{32}(1 - a_{21})} = 1.4533$. 这表明, (4.12) 在所有情形下不一定是最佳的, 即得不到 $c_3 = \max\{s_{nlp}, c_{LLW}\}$. 在 $s_{nlp} < c_{LLW}$ 情形下 u_3 的传播速度仍然是未知的. 命题 4.6 给出了 c_3 的下界的改进估计, 它是与 c_{LLW} 相关的一个 Hamilton-Jacobi 方程的自由边界点给定的.

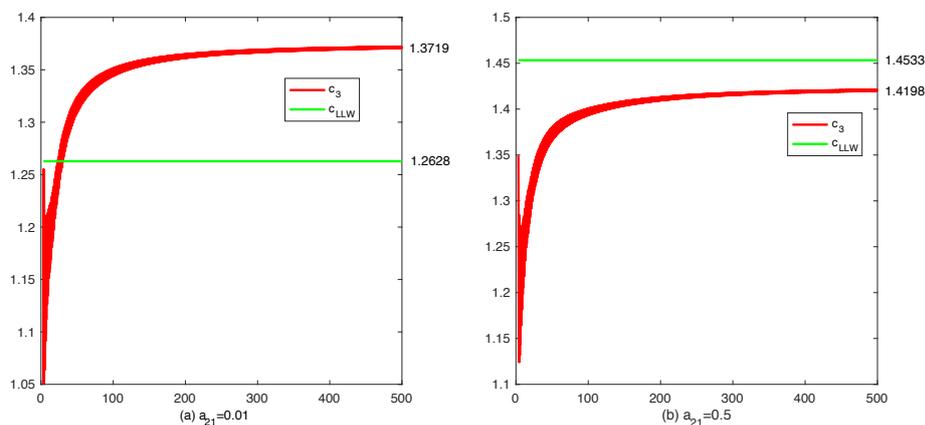


图 4.1 u_3 的近似速度其初值为 $u_1(0, x) = u_2(0, x) = u_3(0, x) = \chi_{[0,10]}$, 和 (a) $a_{21} = 0.01$, (b) $a_{21} = 0.5$, 其中其他的参数为 $r_1 = 1.08$, $d_1 = 1$, $r_3 = 1.1$, $d_3 = 0.6$, $a_{12} = 1.2$, $a_{31} = 0.1$, $a_{32} = 0.4$, $a_{13} = 1.1$, $a_{23} = 1.1$.

我们的下一个数值结果说明在定理 B 里条件 $a_{13}, a_{23} > 1$ 是保证 (4.15) 最优的. 对系统 (1.3) 解的渐近行为在图 4.2 里说明, 分四种情形: (a) $a_{13} > 1$ 和 $a_{23} < 1$, (b) $a_{13} < 1$ 和 $a_{23} > 1$, (c) $a_{13} < 1$ 和 $a_{23} < 1$, (d) $a_{13} > 1$ 和 $a_{23} > 1$. 注意, 定理 A 与 a_{13} 和 a_{23} 无关, 我们在模拟中选择的参数满足定理 A 的假设. 从图 4.2 可以看出, 在 (d) $a_{13} = a_{23} = 1.1 > 1$ 的情形下, (1.3) 的解的行为与定理 B 所预测的一致, 即 u_1 和 u_2 在 u_3 的传播后将会灭绝. 然而, $a_{13} > 1$ 和 $a_{23} < 1$, 即使它们接近 1, 在图 4.2(a) 中表明, 物种 u_2 和 u_3 可在最终区域 $\{(t, x) : x < c_3 t\}$ 共存, 同样, 当 $a_{13} < 1$ 和 $a_{23} > 1$ 时, 物种 u_1 和 u_3 可共存; 参见图 4.2(b). 有趣的是, 当 $a_{13} < 1$ 和 $a_{23} < 1$ 时, 这三个物种可同时存在, 在最终区域传播梯度的研

究超出了本章的范围.

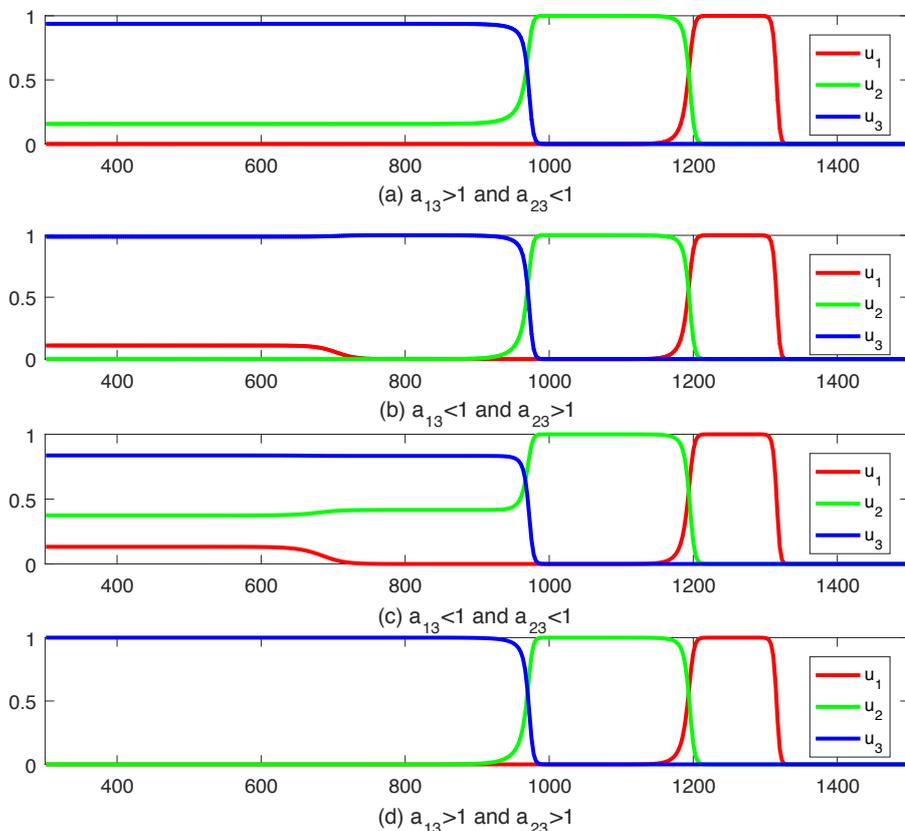


图 4.2 参数 a_{13} 和 a_{23} 不同时 (1.3) 的解的渐近行为, 选择其他参数为 $r_1 = 1.08$, $d_1 = 1$, $r_3 = 1.1$, $d_3 = 0.6$, $a_{12} = 1.2$, $a_{21} = 0.3$, $a_{31} = 0.1$, $a_{32} = 0.4$. (a), $a_{13} = 1.1$ 和 $a_{23} = 0.9$; (b), $a_{13} = 0.9$ 和 $a_{23} = 1.1$; (c), $a_{13} = 0.5$ 和 $a_{23} = 0.7$; (d), $a_{13} = 1.1$ 和 $a_{23} = 1.1$. 初值为 $u_{1,0} = u_{2,0} = u_{3,0} = \chi_{[0,10]}$.

4.1.4 本章的结构

4.2 节介绍并回顾了一类 Hamilton-Jacobi 方程的比较原理. 这个不等式适用于速度空间, 它的解应在粘性的意义上理解. 4.3 节, 在假设 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 下推出最慢物种传播速度的上下界估计, 在某些情形下, 这估计是最佳的. 本章的主要结果, 即定理 A, 在 4.2 和 4.3 节中证明, 这两节是自包含的. 只对本章的主要结果感兴趣的读者可以集中在这两节.

4.4 节确定在第三种入侵波的伴随下齐次态的收敛性, 并证明了定理 B. 4.5, 推出注记 4.3 并证明命题 4.1, 从而得到了完全确定传播速度的充分条件. 最后,

4.6 节中包含了一些有用的引理, 并在 4.7 节中我们建立了引理 4.3 和命题 4.2.

4.2 预备知识

在背景介绍中, 有不同的变量, 包括通过一些 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解定义的 s_{nlp} . 这里简要地解释这些量与物种的传播速度的联系. 假设 $u_\varepsilon(t, x)$ 是新的 Fisher-KPP 方程

$$\partial_t u_\varepsilon = \varepsilon \hat{d} \partial_{xx} u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon (r(t, x) - u_\varepsilon),$$

的解, 其中 $\hat{d} > 0$ 是常数和 $r(t, x)$ 是有界函数. 在 [38, 43] (也可参见 [15]) 观察到传播现象可以用函数 $w_\varepsilon(t, x) = -\varepsilon \log u_\varepsilon(t, x)$ 很好地描述. 此外, 如果存在局部一致的极限 $w(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon(t, x)$, 满足下面粘性意义上的一阶 Hamilton-Jacobi 方程:

$$\min \left\{ \partial_t w(t, x) + \hat{d} |\partial_x w(t, x)|^2 + r(t, x), w(t, x) \right\} = 0. \quad (4.25)$$

那么, 当 $w(t, x) > 0$ 时种群密度 $u_\varepsilon(t, x)$ 将指数收敛到 0, 然而当 $w(t, x) = 0$ 时 $u_\varepsilon(t, x)$ 的下界为某个正常数. 关于后一项的准确叙述, 参见引理 4.4.

在特殊情形下 $r(t, x) = \hat{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{t}\right)$ (即它只依赖于 x/t), 那么极限 $w(t, x)$ 可以表示为 $t\rho\left(\frac{x}{t}\right)$, 其中 ρ 为某些连续函数 (详细说明请参见注记 4.7). 在这种情形下, 对 ρ 进行处理很方便, 它满足速度 $s = x/t$ 一维空间中的简化方程. (参见命题 4.2 的证明.)

$$\min \{ \rho(s) - s\rho'(s) + \hat{d} |\rho'(s)|^2 + \hat{\mathcal{R}}(s), \rho(s) \} = 0. \quad (4.26)$$

现在, 如果有 $\hat{s} > 0$ 使得

$$\rho(s) = 0, \quad 0 < s < \hat{s}, \quad \text{和} \quad \rho(s) > 0, \quad s > \hat{s}.$$

那么在 $\{(t, x) : x/t > \hat{s}\}$ 中, 物种将指数收敛到零, 并且在 $\{(t, x) : x/t < \hat{s}\}$ 中有正下界, 即它在 [5, 6] 的意义上以速度 \hat{s} 传播. 这就引出了在本章中传播速度以 (4.26) 的自由边界点来定义.

接下来, 我们给出与 (4.26) 相关的粘性上下解的定义 (参见 [1, 节 6.1]). (4.25) 对应的定义类似且在第三章 3.8 给定, 在第三章的定理 3.5 中给出了比较原理. 出于本章目的, 同章假设函数 $\hat{\mathcal{R}}(s)$ 是有界的且分段 Lipschitz 连续的.

定义 4.4 一个下半连续函数 $\hat{\rho}$ 是 (4.26) 的粘性上解如果 $\hat{\rho} \geq 0$, 和对所有的试验函数 $\phi \in C^1$, 如果 s_0 是 $\hat{\rho} - \phi$ 的一个严格的局部最小值点, 那么

$$\hat{\rho}(s_0) - s_0\phi'(s_0) + \hat{d}|\phi'(s_0)|^2 + \hat{\mathcal{R}}^*(s_0) \geq 0.$$

一个上半连续函数 $\hat{\rho}$ 是 (4.26) 的粘性下解如果对任意试验函数 $\phi \in C^1$, 如果 s_0 是 $\hat{\rho} - \phi$ 的一个严格的局部最大值点使得 $\hat{\rho}(s_0) > 0$, 那么

$$\hat{\rho}(s_0) - s_0\phi'(s_0) + \hat{d}|\phi'(s_0)|^2 + \hat{\mathcal{R}}_*(s_0) \leq 0.$$

最后, $\hat{\rho}$ 是 (4.26) 的粘性解当且仅当 $\hat{\rho}$ 既是粘性上解又是粘性下解.

函数 $\hat{\mathcal{R}}^*$ 和 $\hat{\mathcal{R}}_*$ 上面出现的分别是 $\hat{\mathcal{R}}$ 的上半连续和下半连续包络, 即

$$\hat{\mathcal{R}}^*(s) = \limsup_{s' \rightarrow s} \hat{\mathcal{R}}(s') \quad \text{和} \quad \hat{\mathcal{R}}_*(s) = \liminf_{s' \rightarrow s} \hat{\mathcal{R}}(s').$$

引理 4.1 给定 $c_b \in (0, \infty]$. 函数 $\rho(s)$ 在区间 $(0, c_b)$ 上是 (4.26) 的粘性下解 (上解) 当且仅当 $w(t, x) = t\rho(\frac{x}{t})$ 在区域 $\{(t, x) : 0 < x < c_b t\}$ 上是

$$\min \left\{ \partial_t w + \hat{d}|\partial_x w|^2 + \hat{\mathcal{R}}(x/t), w \right\} = 0 \quad (4.27)$$

的粘性下解 (上解).

证明. $\rho(s)$ 在 $(0, c_b)$ 上是 (4.26) 的粘性下解. 验证 $w(t, x) = t\rho(\frac{x}{t})$ 是 (4.27) 的粘性下解. 对任意试验函数 $\varphi \in C^1$ 假设 $w - \varphi$ 在点 (t_*, x_*) 上达到一个严格的局部最大值使得 $w(t_*, x_*) > 0$. 因为 $w(t, x) = t\rho(\frac{x}{t})$, 我们推出 $\rho(\frac{x_*}{t_*}) > 0$ 和 $\tau \mapsto \tau t_* \rho(\frac{x_*}{t_*}) - \varphi(\tau t_*, \tau x_*)$ 在 $\tau = 1$ 上有一个严格的局部最大值, 为了方便令 $s_* = x_*/t_*$ 有

$$t_* \rho(s_*) - t_* \partial_t \varphi(t_*, x_*) - x_* \partial_x \varphi(t_*, x_*) = 0. \quad (4.28)$$

设 $\phi(s) := \varphi(t_*, s t_*)/t_*$. 容易验证 $\rho(s) - \phi(s)$ 在 $s = s_*$ 上取得严格的局部最大值和 $\rho(s_*) > 0$. 此外, 由 (4.28), 我们得到

$$\partial_x \varphi(t_*, x_*) = \phi'(s_*) \quad \text{和} \quad \partial_t \varphi(t_*, x_*) = \rho(s_*) - s_* \phi'(s_*).$$

因此在点 (t_*, x_*) , 直接计算满足

$$\partial_t \varphi + \hat{d}|\partial_x \varphi|^2 + \hat{\mathcal{R}}_*(x_*/t_*) = \rho(s_*) - s_* \phi'(s_*) + \hat{d}|\phi'(s_*)|^2 + \hat{\mathcal{R}}_*(s_*) \leq 0,$$

其中最后一个不等式成立因为 ρ 是 (4.26) 的粘性下解其中 $\phi(s)$ 是试验函数. 因此 w 是 (4.27) 的粘性下解.

反过来, $w(t, x) = t\rho\left(\frac{x}{t}\right)$ 是 (4.25) 的粘性下解. 选择任意试验函数 $\phi \in C^1$ 使得 $\rho(s) - \phi(s)$ 在点 s_* 上达到严格的局部最大值使得 $\rho(s_*) > 0$. 不失一般性, 假设 $\rho(s_*) - \phi(s_*) = 0$. 那么 $w(t, x) - t\phi\left(\frac{x}{t}\right) - (t-1)^2 = t\rho\left(\frac{x}{t}\right) - t\phi\left(\frac{x}{t}\right) - (t-1)^2$ 在点 $(1, s_*)$ 上达到严格的局部最大值. 因此, 由 $w(t, x)$ 是粘性下解, 推出

$$\phi(s_*) - s_*\phi'(s_*) + |\phi'(s_*)|^2 + \hat{\mathcal{R}}_*(s_*) \leq 0,$$

这表明 ρ 是 (4.26) 的粘性下解.

对于粘性上解的等价证明是相似的, 并略去. □

现给出关于 (4.26) 的比较结果.

引理 4.2 固定任意的 $c_b \in (0, \infty]$. $\bar{\rho}$ 和 $\underline{\rho}$ 在区间 $(0, c_b)$ 上是一对 (4.26) 的粘性上解和下解其边界条件满足

$$\underline{\rho}(0) \leq \bar{\rho}(0), \quad \limsup_{s \rightarrow c_b} \frac{\underline{\rho}(s)}{s} \leq \liminf_{s \rightarrow c_b} \frac{\bar{\rho}(s)}{s} \quad \text{和} \quad \limsup_{s \rightarrow c_b} \frac{\underline{\rho}(s)}{s} < \infty. \quad (4.29)$$

那么在 $[0, c_b]$ 上有 $\bar{\rho} \geq \underline{\rho}$.

证明. 如果 $(0, c_b)$ 是有界区间, 那么引理 4.2 是 [94, 定理 2] 的一个直接结果. 仍需考虑 $c_b = \infty$ 的情形. 定义

$$\bar{w}(t, x) := t\bar{\rho}\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{和} \quad \underline{w}(t, x) := t\underline{\rho}\left(\frac{x}{t}\right).$$

这里应用第三章的定理 3.5 推出简化后方程相应结果. 由引理 4.1, \bar{w} 和 \underline{w} 是 (4.27) 的一对粘性上解和下解. 仍需证明对 $t > 0, x > 0$ 边界条件 $\underline{w}(t, 0) \leq \bar{w}(t, 0)$ 和 $\underline{w}(0, x) \leq \bar{w}(0, x)$, 这可由下面计算可得.

$$\underline{w}(t, 0) = t\underline{\rho}(0) \leq t\bar{\rho}(0) = \bar{w}(t, 0) \quad t \geq 0, \quad (4.30)$$

和

$$\begin{aligned} \underline{w}(0, x) &\leq \limsup_{t \rightarrow 0} \left[t\underline{\rho}\left(\frac{x}{t}\right) \right] = x \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{\underline{\rho}(s)}{s} \leq x \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{\bar{\rho}(s)}{s} \\ &= \liminf_{t \rightarrow 0} \left[t\bar{\rho}\left(\frac{x}{t}\right) \right] \leq \bar{w}(0, x), \end{aligned} \quad (4.31)$$

其中应用了 (4.29). 因此, 应用第三章的定理 3.5 推出在 $[0, \infty) \times [0, \infty)$ 上有 $\bar{w} \geq \underline{w}$, 这表明对 $s \in [0, \infty)$ 有 $\bar{\rho}(s) \geq \underline{\rho}(s)$. 至此证明完成. □

此后, 对某常数 $\hat{r} > 0$ 和 $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 令 $\hat{\mathcal{R}}(s) = \hat{r} - g(s)$ 使得

(H_g) 函数 g 是非负的, 有界和分段 Lipschitz 连续的, 且对某些 $c_g \geq \hat{d}(\hat{\lambda} \wedge \sqrt{\hat{r}/\hat{d}}) + \frac{\hat{r}}{\hat{\lambda} \wedge \sqrt{\hat{r}/\hat{d}}}$ 有 $\text{spt } g \subset [0, c_g]$.

也就是考虑

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + \hat{d}|\rho'|^2 + \hat{r} - g(s), \rho\} = 0, & (0, \infty), \\ \rho(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho(s)}{s} = \hat{\lambda}. \end{cases} \quad (4.32)$$

我们提到对于本文导出的 Hamilton-Jacobi 方程, (H_g) 总是满足的. 下一个结果与 Hamilton-Jacobi 方程的有界的传播速度有关.

引理 4.3 假设 (H_g) 成立. 那么对任意 λ , (4.32) 存在唯一的粘性解 $\hat{\rho}$, 它满足

(a) 如果 $\hat{\lambda} \leq \frac{c_g}{2\hat{d}}$, 那么 $s \geq c_g$ 有 $\hat{\rho}(s) = \hat{\lambda}s - (\hat{d}\hat{\lambda}^2 + \hat{r})$;

(b) 如果 $\hat{\lambda} > \frac{c_g}{2\hat{d}}$, 那么

$$\hat{\rho}(s) = \begin{cases} \hat{\lambda}s - (\hat{d}\hat{\lambda}^2 + \hat{r}), & s \geq 2\hat{d}\hat{\lambda}, \\ \frac{s^2}{4\hat{d}} - \hat{r}, & c_g \leq s < 2\hat{d}\hat{\lambda}. \end{cases}$$

可知 (4.32) 的粘性解 $\hat{\rho}$ 的存在和唯一性参见 [26, 定理 2]. 设 $\hat{w}(t, x) := t\hat{\rho}(\frac{x}{t})$. 由引理 4.1, $\hat{w}(t, x)$ 在 $(0, \infty) \times (0, \infty)$ 上是 (4.27) 的粘性解其边界为 $w(t, 0) = 0$ 和初值为 $w(0, x) = h_{\hat{\lambda}}(x)$, 其中

$$h_{\hat{\lambda}}(x) = \hat{\lambda}x, \quad 0 < \hat{\lambda} < \infty, \quad \text{和} \quad h_{\infty}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \infty, & x > 0. \end{cases}$$

对每种情形, 都可以应用动态规划原理 (参见 [43, 定理 1] 或 [38, 定理 5.1]) 推出 $\hat{w}(t, x) = \max\{J(t, x), 0\}$, 其中

$$J(t, x) = \inf_{\gamma} \left\{ \int_0^t \left[\frac{|\dot{\gamma}(s)|^2}{4\hat{d}} - \hat{r} + g(\gamma(s)) \right] ds + h_{\hat{\lambda}}(\gamma(0)) \right\},$$

这里的 infimum 取所有的绝对连续路径 $\gamma : [0, t] \rightarrow [0, \infty)$, 使得 $\gamma(t) = x$. 因此, 我们可如在第二章的 2.7 节通过直接计算得到上述 (a) 和 (b), 其表明, 粘性解 $\hat{\rho}(s)$ 在区间 $[c_g, \infty)$ 上不依赖于 g . 或者, 可以通过构造简单的上下解并应用引理 4.2 得到. 由于证明很简单但很繁琐, 其将在 4.7 节中给出.

命题 4.2 假设 (H_g) 成立. 对每一 $\hat{\lambda} \in (0, \infty]$, $\tilde{w}(t, x)$ 是 (4.25) 的粘性上解 (下解), 其中 $r = \hat{r} - g(x/t)$. 那么在 $(0, \infty) \times (0, \infty)$ 上有 $\tilde{w}(t, x) \geq t\hat{\rho}(\frac{x}{t})$ ($\tilde{w}(t, x) \leq t\hat{\rho}(\frac{x}{t})$), 其中 $\hat{\rho}$ 是 (4.32) 的唯一的粘性解.

证明. 由引理 4.1, $t\hat{\rho}(\frac{x}{t})$ 是 (4.25) 的粘性解其中 $r = \hat{r} - g(x/t)$. 因此, 当 $\hat{\lambda} \in (0, \infty)$ 时, 由第三章的定理 3.5 直接可得结论. $\hat{\lambda} = \infty$ 情形, 通过相似的论证可以得到, 并延迟到 4.7 节证明.

推论 4.2 假设 (H_g) 成立. 固定任意 $\hat{\lambda} \in (0, \infty]$. $\tilde{\rho}$ 是 (4.32) 的粘性上解 (下解). 那么对 $s \in (0, \infty)$ 有 $\tilde{\rho}(s) \geq \hat{\rho}(s)$ ($\tilde{\rho}(s) \leq \hat{\rho}(s)$), 其中 $\hat{\rho}$ 是 (4.32) 的唯一粘性解.

证明. 这是命题 4.2 的直接结果, 注意到 $\tilde{w}(t, x) := t\tilde{\rho}(x/t)$ 是 (4.25) 的粘性上解 (下解), 其中 $r = \hat{r} - g(x/t)$; 参见引理 4.1. \square

4.3 定理 A 的证明

这一节专门讨论主要结果的证明, 即定理 A. 4.3.1 小节定义一些符号. 然后, \bar{c}_3 和 c_3 的估计分别在小节 4.3.2 和 4.3.3 中给出. 在这一节中, 假设 d_i, r_i, a_{ij} 和初值 $u_{i,0}$ 是固定的, 这样对某些 $c_1 > c_2$ 和 $\lambda \in (0, \infty]$ ($H_{c_1, c_2, \lambda}$) 成立 (参见定义 4.1). 为了得到解的渐近估计, 通过以下伸缩变换我们引入一个小参数 ϵ :

$$u_i^\epsilon(t, x) = u_i\left(\frac{t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon}\right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.33)$$

我们重写 (1.3) 中 u_3 的方程为

$$\begin{cases} \partial_t u_3^\epsilon = \epsilon d_3 \partial_{xx} u_3^\epsilon + \frac{r_3}{\epsilon} u_3^\epsilon (1 - a_{31} u_1^\epsilon - a_{32} u_2^\epsilon - u_3^\epsilon), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u_3^\epsilon(0, x) = u_{3,0}(\frac{x}{\epsilon}), & \mathbb{R}. \end{cases}$$

正如 4.2 节讨论的, 通过考虑 WKB-变换我们得到当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时 u_3^ϵ 的渐近行为, 这是由于

$$w_3^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log u_3^\epsilon(t, x), \quad (4.34)$$

并满足下面方程.

$$\begin{cases} \partial_t w_3^\epsilon - \epsilon d_3 \partial_{xx} w_3^\epsilon + d_3 |\partial_x w_3^\epsilon|^2 + r_3(1 - a_{31} u_1^\epsilon - a_{32} u_2^\epsilon - u_3^\epsilon) = 0, & (0, \infty) \times (0, \infty), \\ w_3^\epsilon(0, x) = -\epsilon \log u_{3,0}(\frac{x}{\epsilon}), & [0, \infty), \\ w_3^\epsilon(t, 0) = -\epsilon \log u_3^\epsilon(t, 0), & [0, \infty). \end{cases} \quad (4.35)$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时下面的结果给出了 w_3^ϵ 和 u_3^ϵ 之间的联系, 它最初由 [38] 给出.

引理 4.4 假设 K, K' 是任意的紧集使得 $K \subset \text{Int } K' \subset K'$. 如果在 K' 上当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时 $w_3^\epsilon \rightarrow 0$, 那么

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K u_3^\epsilon \geq 1 - a_{31} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{K'} u_1^\epsilon - a_{32} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{K'} u_2^\epsilon.$$

特别地,

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K u_3^\epsilon \geq 1 - a_{31} - a_{32} > 0.$$

证明. 证明类似于第三章引理 3.1, 此处略去细节. \square

定义

$$w_3^*(t, x) := \limsup_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w_3^\epsilon(t', x') \quad \text{和} \quad w_{3,*}(t, x) := \liminf_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (t, x)}} w_3^\epsilon(t', x'). \quad (4.36)$$

注记 4.7 w_3^* 和 $w_{3,*}$ 定义在 (4.36). 那么对任意 $c \in \mathbb{R}$,

$$w_3^*(t, ct) = t w_3^*(1, c) \quad \text{和} \quad w_{3,*}(t, ct) = t w_{3,*}(1, c). \quad (4.37)$$

实际上, 由 (4.33) 和 (4.34), 在 (4.37) 的第一个等式归应于下面观察:

$$\begin{aligned} t w_3^*(1, c) &= -t \limsup_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t', x') \rightarrow (1, c)}} \left[\epsilon \log u_3 \left(\frac{t'}{\epsilon}, \frac{x'}{\epsilon} \right) \right] \\ &= - \limsup_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (t'', x'') \rightarrow (t, ct)}} \left[(\epsilon t) \log u_3 \left(\frac{t''}{\epsilon t}, \frac{x''}{\epsilon t} \right) \right] = w_3^*(t, ct), \end{aligned}$$

其中 $(t'', x'') = (t', x')t$. (4.37) 的第二个等式通过相同的论证可得.

下面的引理, 其证明在第二章的引理 2.3 和第三章的引理 3.2 中, 说明 w_3^* 和 $w_{3,*}$ 的定义是好的.

引理 4.5 对某 $\lambda \in (0, \infty]$ 使得 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立和 w_3^ϵ 是 (4.35) 的解.

(i) 如果 $\lambda \in (0, \infty)$, 那么存在与 ϵ 无关的常数 $Q > 0$ 使得

$$\max\{\lambda x - Q(t + \epsilon), 0\} \leq w_3^\epsilon(t, x) \leq \lambda x + Q(t + \epsilon), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times [0, \infty);$$

(ii) 如果 $\lambda = \infty$, 那么对每一个紧子集 $K \subset [(0, \infty) \times [0, \infty)]$, 那么存在与 ϵ 无关的常数 $Q(K) > 0$ 对任意 $(t, x) \in K$ 使得

$$0 \leq w_3^\epsilon(t, x) \leq Q(K), \quad \epsilon \in (0, 1/Q(K)].$$

注记 4.8 通过比较, 我们可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} u_3(t, 0) \geq (1 - a_{31} - a_{32})/2 > 0$, 所以定义 (4.36) 表明对 $t \geq 0$ 有 $w_3^*(t, 0) = w_{3,*}(t, 0) = 0$. 同时, 如果 $\lambda \in (0, \infty)$, 那么在引理 2.3(i) 中取 $t = 0$ 和 $\epsilon \rightarrow 0$ 推出对 $x \geq 0$ 有 $w_3^*(0, x) = w_{3,*}(0, x) = \lambda x$.

4.3.1 定义和预备知识

在本节中, 对某一 $c_1 > c_2$ 和 $\lambda \in (0, \infty]$, 假设 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立 (参见定义 4.1). 我们基于参数 $d_3, r_3, a_{21}, a_{31}, a_{32}, c_{LLW}, c_1, c_2, \lambda$. 继续定义几个变量. 我们在表 4.1 列出了对象, 以及它们定义的位置, 以便快速引用.

4.3.1.1 定义 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(s)$, 其中 $\mu \in [0, 1]$

对每一 $\mu \in [0, 1]$, 定义函数 $\rho_{\text{nlp}}^\mu : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是 Hamilton-Jacobi 方程

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + \mathcal{R}^\mu(s), \rho\} = 0, & (0, \infty), \\ \rho(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho(s)}{s} = \lambda, \end{cases} \quad (4.38)$$

的唯一的粘性解, 其中 $\mathcal{R}^\mu(s) = r_3(1 - \mu a_{31}\chi_{\{c_2 < s \leq c_1\}} - a_{32}\chi_{\{s \leq c_2\}})$, 和 $\lambda \in (0, \infty]$ 给定在 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$. ρ_{nlp}^μ 的存在和唯一性由引理 4.3 保证. (当 $\mu = 0$, 物种 u_1 不与 u_3 竞争. 我们将使用它作为一个初始情形来引导到 $\mu = 1$.)

表 4.1 对象列表

对象	定义位置	应用位置	性质
α_3	4.3.1.3 节	4.3.2, 4.3.3, 4.4, 4.5 节	$\alpha_3 = 2\sqrt{d_3 r_3}$
c_{LLW}	定义 4.3	4.3.2, 4.3.3, 4.5 节	$c_{LLW} \leq \alpha_3$
$w_3^*, w_{3,*}$	4.3, (4.36) 节	4.3 节	注记 4.7
ρ_{nlp}^μ	4.3.1.1 节	4.3.2 节	引理 4.8
s_{nlp}^μ	4.3.1.2 节	4.3.2 节	(4.42)
β_3^μ	4.3.1.3 节	4.3.2.1 节	引理 4.7
$s^\mu(\hat{c})$	4.3.1.5 节	4.3.2.1 节	引理 4.10
$\nu_2^\mu(\hat{c}), \nu_3^\mu$	4.3.1.5 节	4.3.2.1 节	注记 4.10
\mathcal{E}	4.3.2.1 节, (4.67)	命题 4.5	命题 4.3
ρ_{nlp}	命题 4.6	4.3.3, 4.5 节	在 (4.38) 里对 $\mu = 1$ 有 $\rho_{nlp} = \rho_{nlp}^1$
s_{nlp}	4.1 节, (4.9)	4.3.2.2, 4.3.3, 4.5 节	命题 4.7
β_3	4.3.2.2 节	4.3.2.2, 4.3.3 节	$\beta_3 = \max\{c_{LLW}, s_{nlp}\}$
$\underline{\beta}_3$	4.1 节, (4.90)	4.3.3 节	命题 4.6

引理 4.6 对任意 $\mu \in [0, 1]$, $\rho_{nlp}^\mu(s)$ 是 Lipschitz 连续的且对 $\mu \in [0, 1]$ 是非递减的, 并对 $s \in [0, \infty)$ 是非递减的. 此外,

$$\{s \geq 0 : \rho_{nlp}^\mu(s) = 0\} = [0, s_0] \quad (4.39)$$

对某一依赖于 μ 和 c_1, c_2 的 $s_0 \geq 2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{31} - a_{32})}$, 它由 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 给定.

证明. 步骤 1. 证明 ρ_{nlp}^μ 关于 μ 的连续性和单调性. 任意给定 $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq 1$, 对应 $\mu = \mu_1$ 和 $\mu = \mu_2$, $\rho_{nlp}^{\mu_1}$ 和 $\rho_{nlp}^{\mu_2}$ 分别是 (4.38) 的粘性解. 只需证明

$$0 \leq \rho_{nlp}^{\mu_2}(s) - \rho_{nlp}^{\mu_1}(s) \leq r_3 a_{31} (\mu_2 - \mu_1), \quad s \in [0, \infty). \quad (4.40)$$

为此, 首先应用引理 4.3, 其中 $c_g = c_1$, 我们推出对 $s \in [c_1, \infty)$ 有 $\rho_{nlp}^{\mu_1}(s) = \rho_{nlp}^{\mu_2}(s)$. 仍需证明对 $s \in [0, c_1]$ 有 (4.40). 在这种情况下, $\rho_{nlp}^{\mu_1}$ 定义是问题

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + \mathcal{R}^{\mu_1}(s), \rho\} = 0, & (0, c_1), \\ \rho(0) = 0, \quad \rho(c_1) = \rho_{nlp}^{\mu_2}(c_1), \end{cases} \quad (4.41)$$

的唯一的粘性解. 容易验证 $\rho_{nlp}^{\mu_2}$ 和 $\rho_{nlp}^{\mu_2} - r_3 a_{31} (\mu_2 - \mu_1)$ 分别是 (4.41) 的粘性上解和下解. 由于边界条件易于验证, 应用引理 4.2, 我们推出 (4.40).

步骤 2. 证明 ρ_{nlp}^μ 关于 $s \in [0, \infty)$ 是非递减的. 反证, 假设存在某一 $s_0 \in (0, \infty)$ 使得 $\rho_{nlp}^\mu - 0$ 在 s_0 点达到最大值并且 $\rho_{nlp}^\mu(s_0) > 0$. 根据粘性解得定义 (见定义 4.4

和 [1, 命题 3.1]), 有

$$0 \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(s_0) - s_0 \cdot 0 + d_3|0|^2 + \mathcal{R}^\mu(s_0) = \rho_{\text{nlp}}^\mu(s_0) + \mathcal{R}^\mu(s_0),$$

这与 $\mathcal{R}^\mu \geq 0$ 矛盾. 步骤 2 完成.

步骤 3. 证明对于 $s \in [0, \infty)$ 有 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(s) \leq \max\{\frac{s^2}{4d_3} - r_3(1 - a_{31} - a_{32}), 0\}$.

注意到 $\bar{\rho}_2(s) := \max\{\frac{s^2}{4d_3} - r_3(1 - a_{31} - a_{32}), 0\}$ 是连续的, 非负的, 并当 $s \neq 2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{31} - a_{32})}$ 时是 (4.41) 的经典上解. $\phi \in C^1(0, \infty)$ 是任意的试验函数使得 $\bar{\rho}_2 - \phi$ 在 $\hat{s} = 2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{31} - a_{32})}$ 上达到严格的局部最小值. 那么在 $s = \hat{s}$, 我们直接计算满足

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_2(\hat{s}) - \hat{s}\phi' + d_3|\phi'|^2 + (\mathcal{R}^\mu)^*(\hat{s}) &= -\hat{s}\phi' + d_3|\phi'|^2 + r_3(1 - a_{32}) \\ &\geq d_3 \left[\phi' - \sqrt{\frac{r_3(1 - a_{31} - a_{32})}{d_3}} \right]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

因此, 上面定义的 $\bar{\rho}_2$ 是 (4.41) 的粘性上解. 同时注意到

$$\rho_{\text{nlp}}^\mu(0) \leq \bar{\rho}_2(0) \quad \text{和} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho_{\text{nlp}}^\mu(s)}{s} = \lambda \leq \infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\bar{\rho}_2(s)}{s},$$

应用推论 4.2, 我们完成步骤 3.

最后, 因为 ρ_{nlp}^μ 是非负的, 对 s 是非递减的和 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(0) = 0$, 我们推出对 $s_0 \geq 2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{31} - a_{32})} > 0$ 有 (4.39). \square

4.3.1.2 当 $\mu \in [0, 1]$ 时 s_{nlp}^μ 的定义

对每一 $\mu \in [0, 1]$, 通过

$$s_{\text{nlp}}^\mu := \sup\{s : \rho_{\text{nlp}}^\mu(s) = 0\}, \quad (4.42)$$

定义速度 s_{nlp}^μ . 由引理 4.6, 我们有 $s_{\text{nlp}}^\mu \in [2\sqrt{d_3 r_3(1 - a_{31} - a_{32})}, \infty)$, 并关于 μ 是非增的.

4.3.1.3 α_3 和 β_3^μ 的定义

定义

$$\alpha_3 := 2\sqrt{d_3 r_3} \quad \text{和} \quad \beta_3^\mu := \max\{s_{\text{nlp}}^\mu, c_{\text{LLW}}\}, \quad \mu \in [0, 1], \quad (4.43)$$

其中 c_{LLW} 给定在 4.3.

引理 4.7 β_3^μ 由 (4.43) 定义. 那么对所有的 $\mu \in [0, 1]$ 有 $\beta_3^\mu \leq \sigma_3 < c_2$.

证明. 可知 $\sigma_3 = d_3(\lambda \wedge \sqrt{r_3/d_3}) + \frac{r_3}{\lambda \wedge \sqrt{r_3/d_3}}$. 因为 $c_{LLW} \leq \alpha_3$ (参见定义 4.3) 和 $\sigma_3 < c_2$ (参见定义 4.1(i)), 因此 $c_{LLW} \leq \alpha_3 \leq \sigma_3 < c_2$.

仍需证明 $s_{\text{nlp}}^\mu \leq \sigma_3$. 为此, 定义 ρ_2 为

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + r_3, \rho\} = 0, & (0, \infty), \\ \rho(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho(s)}{s} = \lambda, \end{cases} \quad (4.44)$$

的唯一的粘性解, 它明显是 (4.38) 的粘性下解. 应用推论 4.2 我们推出

$$\rho_2(s) \leq \rho_{\text{nlp}}^\mu(s), \quad s \in (0, \infty). \quad (4.45)$$

我们首先考虑情形 $\lambda > \sqrt{r_3/d_3}$. 在这种情形下, $\sigma_3 = 2\sqrt{d_3 r_3}$ 和 $\lambda > \frac{\sigma_3}{2d_3}$. 由引理 4.3 的直接应用于 (4.44) 其中 $c_g = \sigma_3$ 和 $g = 0$ 有

$$\rho_2(s) = \frac{s^2}{4d_3} - r_3 = \frac{s^2 - (\sigma_3)^2}{4d_3}, \quad s > \sigma_3, s \approx \sigma_3.$$

因此, 由 (4.45) 对 $s > \sigma_3$ 和 $s \approx \sigma_3$ 我们得到 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(s) \geq \rho_2(s) > 0$. 在 (4.42) 里 s_{nlp}^μ 的定义表明 $s_{\text{nlp}}^\mu \leq \sigma_3$. 仍需考虑情形 $\lambda \leq \sqrt{r_3/d_3}$. 在这种情形下, $\sigma_3 = d_3\lambda + \frac{r_3}{\lambda}$ 和 $\lambda \leq \frac{\sigma_3}{2d_3}$. 对 (4.44) 应用引理 4.3 令 $c_g = \sigma_3$ 和 $g = 0$, 我们推出

$$\rho_2(s) = \lambda \left[s - \left(d_3\lambda + \frac{r_3}{\lambda} \right) \right] = \lambda(s - \sigma_3), \quad s > \sigma_3, s \approx \sigma_3.$$

因此, 对 $s > \sigma_3$ 并且 $s \approx \sigma_3$ 有 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(s) \geq \rho_2(s) > 0$, 这表明 $s_{\text{nlp}}^\mu \leq \sigma_3$. \square

注记 4.9 令 (4.38), (4.42) 和 (4.43) 里的 $\mu = 1$. 容易可知

$$\rho_{\text{nlp}}^1 = \rho_{\text{nlp}}, \quad s_{\text{nlp}}^1 = s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda) \quad \text{和} \quad \beta_3^1 = \beta_3 := \max\{c_{LLW}, s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)\},$$

其中 ρ_{nlp} 和 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 分别定义在 (4.8) 和 (4.9). 记住这一点, 当考虑 $\mu = 1$ 时, 为了简单我们去掉标记 w_{nlp}^1 , s_{nlp}^1 和 β_3^1 里的上标 1.

引理 4.8 对任意 $\mu \in [0, 1]$, ρ_{nlp}^μ 是 (4.38) 的唯一的粘性解. 如果 $s_{\text{nlp}}^\mu > \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}$, 那么

$$\rho_{\text{nlp}}^\mu(c_2) = \lambda_{\text{nlp}}^\mu(c_2 - s_{\text{nlp}}^\mu),$$

其中 $\lambda_{\text{nlp}}^\mu = \frac{s_{\text{nlp}}^\mu - \sqrt{(s_{\text{nlp}}^\mu)^2 - \alpha_3^2(1 - a_{32})}}{2d_3}$ 和 s_{nlp}^μ 定义在 (4.42).

证明. 我们仅证明 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(c_2) \leq \lambda_{\text{nlp}}^\mu(c_2 - s_{\text{nlp}}^\mu)$, 而 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(c_2) \geq \lambda_{\text{nlp}}^\mu(c_2 - s_{\text{nlp}}^\mu)$ 由相似的证明可得. 为此, 反证, 假设 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(c_2) > \lambda_{\text{nlp}}^\mu(c_2 - s_{\text{nlp}}^\mu)$. 由连续性可知存在某 $\hat{s} \in (\alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}, s_{\text{nlp}}^\mu)$ 使得

$$\rho_{\text{nlp}}^\mu(c_2) > \nu_0(\hat{s}) \cdot (c_2 - \hat{s}), \quad (4.46)$$

其中 $\nu_0(\hat{s}) = \frac{1}{2d_3}(\hat{s} - \sqrt{\hat{s}^2 - \alpha_3^2(1 - a_{32})})$. 当 $\hat{s} \rightarrow s_{\text{nlp}}^\mu$, 由 $\nu_0(\hat{s}) \rightarrow \lambda_{\text{nlp}}^\mu$ 可得 (4.46). 通过 (4.46), 可以验证 ρ_{nlp}^μ 是

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + r_3(1 - a_{32}), \rho\} = 0, & s \in (0, c_2), \\ \rho(0) = 0, \quad \rho(c_2) = \nu_0(\hat{s}) \cdot (c_2 - \hat{s}), \end{cases} \quad (4.47)$$

的粘性上解. 定义 $\underline{\rho}_{\hat{s}}(s) := \max\{\nu_0(\hat{s}) \cdot (s - \hat{s}), 0\}$. 可直接验证 $\underline{\rho}_{\hat{s}}$ 是 (4.47) 的粘性下解. (实际上它是 (4.47) 的粘性解.) 再次应用引理 4.2, 对 $s \in [0, c_2]$ 有 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(s) \geq \underline{\rho}_{\hat{s}}(s)$. 因此, 我们推出

$$[0, s_{\text{nlp}}^\mu] = \{s : \rho_{\text{nlp}}^\mu(s) = 0\} \subset \{s : \underline{\rho}_{\hat{s}}(s) = 0\} = [0, \hat{s}],$$

其中第一个等式是遵循 s_{nlp}^μ 的定义 (4.42). 这意味着 $s_{\text{nlp}}^\mu \leq \hat{s}$, 与 $\hat{s} \in (\alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}, s_{\text{nlp}}^\mu)$ 矛盾. 到此引理 4.8 完成. \square

4.3.1.4 当 $\mu \in [0, 1]$ 和 $\ell > 0$ 时 $\underline{\rho}_\ell^\mu(s)$ 的定义

对任意给定的 $\ell > 0$, 定义

$$\nu_1(\ell) := \frac{1}{2d_3} \left(\ell + \sqrt{\ell^2 - \alpha_3^2(1 - a_{32})} \right). \quad (4.48)$$

引理 4.9 对任意的 $\mu \in [0, 1]$ 和 ℓ', ℓ 使得 $0 < \ell < \ell' \leq c_2$, 通过 $\underline{\rho}_\ell^\mu(s) := \min\{\rho_{\text{nlp}}^\mu(s), \nu_1(\ell) \cdot (s - \ell)\}$ 定义的函数 $\underline{\rho}_\ell^\mu : [\ell, \ell'] \rightarrow [0, \infty)$ 是

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + r_3(1 - a_{32}), \rho\} = 0, & (\ell, \ell'), \\ \rho(\ell) = 0, \quad \rho(\ell') = \rho_{\text{nlp}}^\mu(\ell'), \end{cases} \quad (4.49)$$

的粘性下解, 其中 $\nu_1(\ell)$ 是 (4.48) 给定的. 此外, 如果 $\nu_1(\ell) \cdot (\ell' - \ell) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(\ell')$, 那么 $\underline{\rho}_\ell^\mu$ 是 (4.49) 的唯一粘性解.

证明. 首先验证 $\underline{\rho}_\ell^\mu$ 是 (4.49) 的粘性下解. 容易知道 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(s)$ 和 $\nu_1(\ell)(s - \ell)$ 是 (4.49) 的第一个方程的粘性解且满足 (4.49) 无论何时他们都是可导的. 他们都是 Lipschitz 连续的 (因为他们在粘性意义下满足 $\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 \leq 0$, 所以他们的 Lipschitz 有界是局部有界的 [64, 命题 1.14]). 应用 Rademacher 定理, 他们都是几乎处处可导的, 因此他们几乎处处满足方程 (4.49). 因此, $\underline{\rho}_\ell^\mu$ 也是 Lipschitz 连续的和几乎处处满足 (4.49) 的第一个方程. 由 Hamiltonian 的凸性, 应用 [8, 命题 5.1] 推出它实际上是 (4.49) 的第一个方程的粘性下解. 因为它明显地满足边界条件, $\underline{\rho}_\ell^\mu$ 是 (4.49) 的粘性下解.

如果 $\nu_1(\ell) \cdot (\ell' - \ell) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(\ell')$, 那么 ρ_{nlp}^μ 和 $\nu_1(\ell) \cdot (s - \ell)$ 都是 (4.49) 的粘性上解. 取他们的最小值后, 得到的函数 $\underline{\rho}_\ell^\mu$ 也是 (4.49) 的粘性上解 (参见 [1, 定理 7.1 的证明]). 由于 $\underline{\rho}_\ell^\mu$ 已经是粘性下解, 因此它是一个粘性解. 最后, 唯一性遵循引理 4.3. \square

4.3.1.5 $s^\mu(\hat{c})$, $\nu_2^\mu(\hat{c})$, 和 ν_3^μ 的定义

对任意给定的 $\mu \in [0, 1]$ 和 $\hat{c} \in (\beta_3^\mu, c_2]$, 定义

$$s^\mu(\hat{c}) := \begin{cases} d_3\nu_2^\mu(\hat{c}) + \frac{r_3(1-a_{32}(1-a_{21}))}{\nu_2^\mu(\hat{c})}, & \nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \frac{r_3(1-a_{32}(1-a_{21}))}{d_3\nu_3^\mu}, \text{ 和 } \nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \nu_3^\mu, \\ \beta_3^\mu, & \text{其他,} \end{cases} \quad (4.50)$$

其中 $\beta_3^\mu < c_2$ (在引理 4.7 证明) 和

$$\nu_2^\mu(\hat{c}) := \begin{cases} \frac{1}{2d_3} \left\{ \hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4d_3[r_3(1-a_{32}(1-a_{21})) + \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c})]} \right\}, & \hat{c}^2 \geq 4d_3[r_3(1-a_{32}(1-a_{21})) + \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c})], \\ \infty, & \text{其他,} \end{cases} \quad (4.51)$$

和

$$\nu_3^\mu := \frac{1}{2d_3} \left[\beta_3^\mu + \sqrt{(\beta_3^\mu)^2 - \alpha_3^2(1-a_{32}(1-a_{21}))} \right], \quad (4.52)$$

后者是有意义的因为由 (4.43) 中有 $\beta_3^\mu \geq c_{\text{LLW}} \geq \alpha_3 \sqrt{1-a_{32}(1-a_{21})}$.

记 4.10 通过构造 $\nu_2^\mu(\hat{c})$ 和 ν_3^μ , 我们重写 β_3^μ 为

$$\beta_3^\mu = d_3\nu_3^\mu + \frac{r_3(1-a_{32}(1-a_{21}))}{\nu_3^\mu}. \quad (4.53)$$

假设 $\hat{c}^2 \geq 4d_3[r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21})) + \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c})]$, 我们重写 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c})$ 为

$$\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) = \hat{c}\nu_2^\mu(\hat{c}) - d_3(\nu_2^\mu(\hat{c}))^2 - r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21})). \quad (4.54)$$

此外, 如果 $s^\mu(\hat{c}) > \beta_3^\mu$, 那么由 (4.50) 和 (4.54) 有

$$\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) = \nu_2^\mu(\hat{c}) \cdot (\hat{c} - s^\mu(\hat{c})). \quad (4.55)$$

引理 4.10 $\hat{c} \in (\beta_3^\mu, c_2]$ 和 $s^\mu(\hat{c})$ 是定义在 (4.50). 那么 $s^\mu(\hat{c}) \in [\beta_3^\mu, \hat{c})$.

证明. 首先, 证明 $s^\mu(\hat{c}) \geq \beta_3^\mu$. 由定义 (4.50), 足以验证当 $\nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \frac{r_3(1-a_{32}(1-a_{21}))}{d_3\nu_3^\mu}$ 和 $\nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \frac{r_3(1-a_{32}(1-a_{21}))}{d_3\nu_3^\mu}$ 时有 $s^\mu(\hat{c}) \geq \beta_3^\mu$. 在这种情况下, 利用 (4.53), 直接计算有

$$\begin{aligned} s^\mu(\hat{c}) - \beta_3^\mu &= d_3(\nu_2^\mu(\hat{c}) - \nu_3^\mu) + r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21})) \left[\frac{1}{\nu_2^\mu(\hat{c})} - \frac{1}{\nu_3^\mu} \right] \\ &= \frac{\nu_2^\mu(\hat{c}) - \nu_3^\mu}{\nu_2^\mu(\hat{c})} \left[d_3\nu_2^\mu(\hat{c}) - \frac{r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21}))}{\nu_3^\mu} \right] \geq 0, \end{aligned}$$

这证明了 $s^\mu(\hat{c}) \geq \beta_3^\mu$.

仍需证明 $s^\mu(\hat{c}) < \hat{c}$. 因为 $\hat{c} \in (\beta_3^\mu, c_2]$, 当 $s^\mu(\hat{c}) = \beta_3^\mu$ 时直接可得. 接下来, 假设 $s^\mu(\hat{c}) > \beta_3^\mu$. 因为由 (4.43) 定义有 $\hat{c} > \beta_3^\mu \geq s_{\text{nlp}}^\mu$, 应用 (4.42) 有 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) > 0$. 由于 (4.55), $\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) > 0$ 表明 $s^\mu(\hat{c}) < \hat{c}$. \square

4.3.2 \bar{c}_3 的上界估计

这小节的目的是证明正如在 (4.12) 的陈述的 $\bar{c}_3 \leq \max\{s_{\text{nlp}}, c_{\text{LLW}}\}$. 整节固定 d_i, r_i, a_{ij} 和初值 $u_{i,0}$ 使得对某 $c_1 > c_2$ 和 $\lambda \in (0, \infty]$ 有 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立.

4.3.2.1 对固定 $\mu \in [0, 1]$ 估计 \bar{c}_3

这个小节证明对任意 $\mu \in [0, 1]$ 满足 $w_{3,*}(1, c_2) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(c_2)$ 有 $\bar{c}_3 \leq \beta_3^\mu$, 其中 β_3^μ 由 (4.43) 给定和 $w_{3,*}$ 定义在 (4.36). 参见下面的命题 4.4.

引理 4.11 假设 $(u_i)_{i=1}^3$ 是 (1.3) 的解且 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立. 固定 $\hat{c} \in (\beta_3^\mu, c_2]$ 和 $\mu \in [0, 1]$. 假设

$$w_{3,*}(1, \hat{c}) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) > 0. \quad (4.56)$$

那么有 $\bar{c}_3 \leq s^\mu(\hat{c})$, 其中 $s^\mu(\hat{c})$ 由 (4.50) 定义.

证明. 观察到 (4.56) 里 $w_{3,*}(1, \hat{c}) > 0$ 所以 (由 $w_{3,*}$ 的定义 (4.36)) 当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $u_3(t, \hat{c}t) \rightarrow 0$, 即 $\hat{c} \in (\bar{c}_3, c_2]$. 由 (4.7), 选择序列 $\hat{c}_j \in (\bar{c}_3, c_2)$ 使得当 $j \rightarrow \infty$ 时有 $\hat{c}_j \rightarrow \hat{c}$ 和

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t, \hat{c}_j t) \geq \frac{1 - a_{21}}{2}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (4.57)$$

固定足够大的 $j \in \mathbb{N}$ 使得 $\hat{\mu}_j := w_{3,*}(1, \hat{c}_j) \wedge \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}_j) > 0$. $(\underline{u}_2, \bar{u}_3)$ 是问题

$$\begin{cases} \partial_t \underline{u}_2 - \partial_{xx} \underline{u}_2 = \underline{u}_2(1 - a_{21} - \underline{u}_2 - a_{23} \bar{u}_3), & 0 < x < \hat{c}_j t, t > t_0, \\ \partial_t \bar{u}_3 - d_3 \partial_{xx} \bar{u}_3 = r_3 \bar{u}_3(1 - a_{32} \underline{u}_2 - \bar{u}_3), & 0 < x < \hat{c}_j t, t > t_0, \end{cases} \quad (4.58)$$

的唯一解, 其初-边值条件

$$\underline{u}_2 = \min \left\{ u_2, \frac{1 - a_{21}}{2} \right\} \quad \text{和} \quad \bar{u}_3 = u_3, \quad \partial \{(t, x) : t > t_0, x \in \{0, \hat{c}_j t\}\}.$$

由 (4.57), 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{u}_2(t, \hat{c}_j t) = \frac{1 - a_{21}}{2}$. 显然地, 定义在 (1.3) 里的 (u_2, u_3) 是 (4.58) 的经典上解, 所以由比较原理我们推出

$$u_2 \geq \underline{u}_2 \quad \text{和} \quad u_3 \leq \bar{u}_3, \quad 0 \leq x \leq \hat{c}_j t, t \geq t_0.$$

由 (4.36) 里 $w_{3,*}$ 的定义和 $w_3^\epsilon(1, \hat{c}_j) = -\epsilon \log u_3^\epsilon(1, \hat{c}_j)$, 对小的 $\epsilon > 0$, 有

$$-\epsilon \log u_3 \left(\frac{1}{\epsilon}, \frac{\hat{c}_j}{\epsilon} \right) \geq w_{3,*}(1, \hat{c}_j) + o(1) \geq \hat{\mu}_j + o(1),$$

换言之

$$u_3 \left(\frac{1}{\epsilon}, \frac{\hat{c}_j}{\epsilon} \right) \leq \exp \left(-\frac{\hat{\mu}_j + o(1)}{\epsilon} \right).$$

因为对所有 t 有 $\bar{u}_3(t, \hat{c}_j t) = u_3(t, \hat{c}_j t)$, 这表明

$$\bar{u}_3(t, \hat{c}_j t) = u_3(t, \hat{c}_j t) \leq \exp\{-(\hat{\mu}_j + o(1))t\}, \quad t \gg 1. \quad (4.59)$$

应用引理 4.16 到 $(\underline{u}_2, \bar{u}_3)$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{ct < x < \hat{c}_j t} u_3(t, x) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{ct < x < \hat{c}_j t} \bar{u}_3(t, x) = 0, \quad c > s_{\hat{c}_j}.$$

这里 $s_{\hat{c}_j}$ 可表示为

$$s_{\hat{c}_j} = \begin{cases} c_{\text{LLW}}, & \hat{\mu}_j \geq \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c}_j - c_{\text{LLW}}), \\ \hat{c}_j - \frac{2d_3 \hat{\mu}_j}{\hat{c}_j - \sqrt{\hat{c}_j^2 - 4d_3[\hat{\mu}_j + r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21})])}}, & \hat{\mu}_j < \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c}_j - c_{\text{LLW}}), \end{cases}$$

其中 $0 < \lambda_{\text{LLW}} \leq \sqrt{r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21}))/d_3}$ 是 $\lambda_{\text{cLLW}} - d_3\lambda^2 - r_3(1 - a_{31}(1 - a_{21})) = 0$ 的更小的正根 (参见注记 4.15). 因此, 对所有的 $j \gg 1$ 有 $\bar{c}_3 \leq s_{\hat{c}_j}$. 可知 $\hat{\mu}_j := w_{3,*}(1, \hat{c}_j) \wedge \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}_j) > 0$ 和 $w_{3,*}(1, \hat{c}) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c})$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时我们得到 $\hat{\mu}_j \rightarrow \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c})$ (注意到 ρ_{nlp}^μ 是连续的和 $w_{3,*}$ 是下半连续的). 因此, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, 我们推出 $\bar{c}_3 \leq s_{\hat{c}}$. 这里 $s_{\hat{c}}$ 由

$$s_{\hat{c}} = \begin{cases} c_{\text{LLW}}, & \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) \geq \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}), \\ \hat{c} - \frac{\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c})}{\nu_2^\mu(\hat{c})}, & \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) < \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}), \end{cases} \quad (4.60)$$

给定的, 其中利用 $\nu_2^\mu(\hat{c})$ 的定义 (4.51). 仍需验证 $s_{\hat{c}} \leq s^\mu(\hat{c})$.

如果 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) \geq \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}})$, 那么由 (4.60) 我们得到 $s_{\hat{c}} = c_{\text{LLW}}$. 因为由引理 4.10 和 (4.43) 有 $s^\mu(\hat{c}) \geq \beta_3^\mu \geq c_{\text{LLW}}$, 可知 $s_{\hat{c}} = c_{\text{LLW}} \leq s^\mu(\hat{c})$.

仍需证明 $s_{\hat{c}} \leq s^\mu(\hat{c})$ if $\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) < \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}})$. 应用注记 4.15 我们得到

$$\begin{aligned} \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) &< \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}) \\ &= \lambda_{\text{LLW}}\hat{c} - d_3\lambda_{\text{LLW}}^2 - r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21})). \end{aligned} \quad (4.61)$$

配方, $\lambda_{\text{LLW}}\hat{c} - d_3\lambda_{\text{LLW}}^2 \leq \frac{\hat{c}^2}{4d_3}$ 所以我们推出 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) < \frac{\hat{c}^2}{4d_3} - r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21}))$, 即 $\hat{c}^2 > 4d_3[r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21})) + \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c})]$, 由此应用 (4.54) 和 (4.60) 的第二部分得到

$$s_{\hat{c}} = \frac{\hat{c}\nu_2^\mu(\hat{c}) - \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c})}{\nu_2^\mu(\hat{c})} = d_3\nu_2^\mu(\hat{c}) + \frac{r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21}))}{\nu_2^\mu(\hat{c})}. \quad (4.62)$$

接下来, 验证

$$\nu_2^\mu(\hat{c}) < \lambda_{\text{LLW}} \leq \frac{\beta_3^\mu}{2d_3}. \quad (4.63)$$

实际, 分别由 (4.51) 和注记 4.15, 有

$$0 < \nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \frac{\hat{c}}{2d_3} \quad \text{和} \quad 0 < \lambda_{\text{LLW}} \leq \frac{c_{\text{LLW}}}{2d_3} \leq \frac{\beta_3^\mu}{2d_3} \leq \frac{\hat{c}}{2d_3}. \quad (4.64)$$

由此我们推出 (4.63) 的第二个不等式. 接下来, 比较 (4.61) 和 (4.54) 我们得到

$$\hat{c}\nu_2^\mu(\hat{c}) - d_3(\nu_2^\mu(\hat{c}))^2 < \lambda_{\text{LLW}}\hat{c} - d_3\lambda_{\text{LLW}}^2. \quad (4.65)$$

因为 (4.64) 表明 $\nu_2^\mu(\hat{c})$ 和 λ_{LLW} 在区间 $I = (0, \frac{\hat{c}}{2d_3}]$ 和 $s \mapsto \hat{c}s - d_3s^2$ 是单调的, 这完成了 (4.63) 的证明.

因为 $\nu_3^\mu \geq \frac{\beta_3^\mu}{2d_3}$ (参见 (4.52)), 由 (4.63) 我们推出

$$\nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \nu_3^\mu. \quad (4.66)$$

接下来, 我们分成下面两种情形验证 $s_{\hat{c}} \leq s^\mu(\hat{c})$:

- (i) 如果 $\nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \frac{r_3(1-a_{32}(1-a_{21}))}{d_3\nu_3^\mu}$, 那么由 (4.66) 里的 $\nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \nu_3^\mu$, 由 (4.50) 和 (4.62) 得到 $s_{\hat{c}}$ 正好等于 $s^\mu(\hat{c})$;
- (ii) 如果 $\nu_2^\mu(\hat{c}) > \frac{r_3(1-a_{32}(1-a_{21}))}{d_3\nu_3^\mu}$, 那么由 (4.50) 有 $s^\mu(\hat{c}) = \beta_3^\mu$. 直接计算我们可得

$$\begin{aligned} s^\mu(\hat{c}) - s_{\hat{c}} &= d_3(\nu_3^\mu - \nu_2^\mu(\hat{c})) + r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21})) \left[\frac{1}{\nu_3^\mu} - \frac{1}{\nu_2^\mu(\hat{c})} \right] \\ &= \frac{\nu_3^\mu - \nu_2^\mu(\hat{c})}{\nu_2^\mu(\hat{c})} \left[d_3\nu_2^\mu(\hat{c}) - \frac{r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21}))}{\nu_3^\mu} \right] \geq 0, \end{aligned}$$

其中应用 (4.53) 和 (4.62) 得到第一个等式, 和利用 $\frac{r_3(1-a_{32}(1-a_{21}))}{d_3\nu_3^\mu} < \nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \nu_3^\mu$ 得到最后一个不等式.

从而证明完成了. \square

通过连续性建立证明, ρ_{nlp}^μ 是 (4.38) 的唯一解, 定义

$$\mathcal{E} := \{ \mu \in [0, 1] : w_{3,*}(1, c_2) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(c_2) \}, \quad (4.67)$$

在接下来的两个命题中, 对所有的 $\mu \in \mathcal{E}$ 我们建立了 $\bar{c}_3 \leq \beta_3^\mu$.

命题 4.3 如果 $\mu \in \mathcal{E}$, 那么要么有 $\bar{c}_3 \leq \beta_3^\mu$ 要么对所有的 $c \in [\beta_3^\mu, c_2]$ 有 $w_{3,*}(1, c) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(c)$.

证明. 固定 $\mu \in \mathcal{E}$ 和定义

$$\mathcal{D}_\mu := \{ c' \in [\beta_3^\mu, c_2] : w_{3,*}(1, c) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(c) \quad c \in [c', c_2] \}. \quad (4.68)$$

首先我们注意到 \mathcal{D}_μ 是闭的, 因为 ρ_{nlp}^μ 是连续的和 $w_{3,*}$ 是下半连续的. 同时, 由假设 $c_2 \in \mathcal{D}_\mu$ (它实际上等同于 $\mu \in \mathcal{E}$) 可知 \mathcal{D}_μ 是非空的. 定义 $\hat{c} := \inf \mathcal{D}_\mu$, 那么 $\hat{c} \in \mathcal{D}_\mu$ 和 $\hat{c} \in [\beta_3^\mu, c_2]$. 反证命题 4.3 不成立. 那么有 $\hat{c} \in (\beta_3^\mu, c_2]$ 和 $\bar{c}_3 > \beta_3^\mu$.

步骤 1. 证明 $\bar{c}_3 \leq s^\mu(\hat{c})$, 其中 $s^\mu(\hat{c}) \in [\beta_3^\mu, c_2)$ 是定义在 (4.50). 考虑到 $\bar{c}_3 > \beta_3^\mu$, 这意味着 $s^\mu(\hat{c}) > \beta_3^\mu$.

因为 $\hat{c} \in (\beta_3^\mu, c_2]$ 和 $\hat{c} \in \mathcal{D}_\mu$, 可知 $w_{3,*}(1, \hat{c}) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) > 0$. (可知最后一项是正的, 由定义观察到 $\beta_3^\mu \geq s_{\text{nlp}}^\mu$, 所以 $\hat{c} > \beta_3^\mu \geq s_{\text{nlp}}^\mu$. 因此由 (4.42) 里 s_{nlp}^μ 的定义有 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}) > 0$.) 那么应用引理 4.11 我们推出 $\bar{c}_3 \leq s^\mu(\hat{c})$. 这完成了步骤 1.

为了推出与 $\hat{c} = \inf \mathcal{D}_\mu$ 产生矛盾, 在接下来的三步将找到某一 $\delta = \delta(\hat{c}) > 0$ 使得 $\hat{c} - \delta \in \mathcal{D}_\mu$.

步骤 2. 对所有的 $s \in [s^\mu(\hat{c}), \hat{c}]$ 证明有 $w_{3,*}(1, s) \geq \rho_1(s)$, 其中 ρ_1 是

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + r_3(1 - a_{32}), \rho\} = 0, & s \in (s^\mu(\hat{c}), \hat{c}), \\ \rho(s^\mu(\hat{c})) = 0, \quad \rho(\hat{c}) = \rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}), \end{cases} \quad (4.69)$$

的唯一粘性解 (唯一性参见引理 4.2). 由步骤 1, 有 $\bar{c}_3 \leq s^\mu(\hat{c})$. 因此应用 (4.7) 有

$$\liminf_{\substack{(t', x') \rightarrow (t, x) \\ \epsilon \rightarrow 0}} u_1^\epsilon(t', x') \geq \chi_{\{c_2 t < x < c_1 t\}} \quad \text{和} \quad \liminf_{\substack{(t', x') \rightarrow (t, x) \\ \epsilon \rightarrow 0}} u_2^\epsilon(t', x') \geq \chi_{\{s^\mu(\hat{c})t < x < c_2 t\}}.$$

在 (4.35) 让 $\epsilon \rightarrow 0$, 由 [1, 6.1 节] (和 [9, 命题 3.1 和 3.2]) 可知 $w_{3,*}$ 是

$$\min\{\partial_t w + d_3|\partial_x w|^2 + \bar{\mathcal{R}}_3(x/t), w\} = 0, \quad (0, \infty) \times (0, \infty), \quad (4.70)$$

的粘性上解, 其中 $\bar{\mathcal{R}}_3(s) = r_3(1 - a_{31}\chi_{\{c_2 < s < c_1\}} - a_{32}\chi_{\{s^\mu(\hat{c}) < s < c_2\}})$. (我们注意到, 在推导过程中, 处理 Hamiltonian 函数的不连续时关键地利用了命题 4.8 里的 (4.115).)

验证 $w_{3,*}$ 也是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + d_3|\partial_x w|^2 + r_3(1 - a_{32}), w\} = 0, & s^\mu(\hat{c})t < x < \hat{c}t, \\ w(t, s^\mu(\hat{c})t) = 0, \quad w(t, \hat{c}t) = t\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c}), & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.71)$$

的粘性上解. 首先验证边值条件. 实际上, 由此得出 $w_{3,*}(t, s^\mu(\hat{c})t) \geq 0$ 和 $w_{3,*}(t, \hat{c}t) = tw_{3,*}(1, \hat{c}) \geq t\rho_{\text{nlp}}^\mu(\hat{c})$, 其中第一个等式是由于注记 4.7 的 (4.37) 和最后一个不等式是由于 $\hat{c} \in \mathcal{D}_\mu$. 接下来, 注意到 (4.71) 的第一部分是对 (4.70) 的子域限制, 因为当 $s^\mu(\hat{c})t < x < \hat{c}t$ 时 $\bar{\mathcal{R}}_3(t, x) = r_3(1 - a_{32})$. 因此, $w_{3,*}$ 是 (4.70) 的上解, 自然而然的是 (4.71) 的上解. 那么应用命题 4.2, 利用 (4.69) 和 (4.71) 之间的连接我们推出

$$w_{3,*}(t, x) \geq t\rho_1(x/t), \quad s^\mu(\hat{c})t \leq x \leq \hat{c}t,$$

所以对所有的 $s \in [s^\mu(\hat{c}), \hat{c}]$ 有 $w_{3,*}(1, s) \geq \rho_1(s)$. 步骤 2 完成.

步骤 3. 证明

$$0 < \rho_{\text{ntp}}^\mu(\hat{c}) < \nu_4^\mu(\hat{c}) \cdot (\hat{c} - s^\mu(\hat{c})), \quad (4.72)$$

这里定义 (与在 (4.48) 里的 $\nu_1(\ell)$ 的定义一致)

$$\nu_4^\mu(\hat{c}) := \nu_1(s^\mu(\hat{c})) = \frac{s^\mu(\hat{c}) + \sqrt{(s^\mu(\hat{c}))^2 - \alpha_3^2(1 - a_{32})}}{2d_3}. \quad (4.73)$$

由步骤 1 有 $s^\mu(\hat{c}) > \beta_3^\mu$, 在 (4.50) 的第一个选项成立, 我们可推出

$$s^\mu(\hat{c}) = d_3 \nu_2^\mu(\hat{c}) + \frac{r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21}))}{\nu_2^\mu(\hat{c})}, \quad \nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \frac{r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21}))}{d_3 \nu_3^\mu}.$$

这表明 $\nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \frac{r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21}))}{d_3 \nu_2^\mu(\hat{c})} = \frac{s^\mu(\hat{c})}{d_3} - \nu_2^\mu(\hat{c})$, 所以由 (4.73) 推出

$$\nu_2^\mu(\hat{c}) \leq \frac{s^\mu(\hat{c})}{2d_3} < \nu_4^\mu(\hat{c}).$$

这, 连同注记 4.10 里的 (4.55) 表明

$$0 < \rho_{\text{ntp}}^\mu(\hat{c}) = \nu_2^\mu(\hat{c}) \cdot (\hat{c} - s^\mu(\hat{c})) < \nu_4^\mu(\hat{c}) \cdot (\hat{c} - s^\mu(\hat{c})).$$

(注意到在步骤 1 有 $\hat{c} > \beta_3^\mu \geq s_{\text{ntp}}^\mu$ 可得 $\rho_{\text{ntp}}^\mu(\hat{c}) > 0$.) 我们已证明 (4.72).

步骤 4. 证明存在某一 $\delta > 0$ 使得 $\hat{c} - \delta \in \mathcal{D}_\mu$ 与 $\hat{c} = \inf \mathcal{D}_\mu$ 相矛盾, 并完成了命题 4.3 的证明.

首先, 应用引理 4.9 和 $\ell' = \hat{c}$, $\ell = s^\mu(\hat{c})$ 我们得到

$$\rho_3(s) := \min \{ \rho_{\text{ntp}}^\mu(s), \nu_4^\mu(\hat{c}) \cdot (s - s^\mu(\hat{c})) \} \quad (4.74)$$

是 (4.69) 的粘性上解, 其中 $\nu_4^\mu(\hat{c}) = \nu_1(s^\mu(\hat{c}))$ 定义在 (4.73). ρ_3 的典型剖面参见图 4.3. 因为由定义有 ρ_1 是 (4.69) 的粘性解, 可应用引理 4.2 我们推出

$$\rho_1(s) \geq \rho_3(s), \quad s \in [s^\mu(\hat{c}), \hat{c}]. \quad (4.75)$$

由 (4.72), 通过连续性可得存在 $\delta \in (0, \hat{c} - s^\mu(\hat{c}))$ 使得

$$0 < \rho_{\text{ntp}}^\mu(s) < \nu_4^\mu(\hat{c}) \cdot (s - s^\mu(\hat{c})), \quad s \in [\hat{c} - \delta, \hat{c}].$$

由 (4.74), 在 $[\hat{c} - \delta, \hat{c}]$ 里有 $\rho_3(s) = \rho_{\text{nlp}}^\mu(s)$, 所以

$$w_{3,*}(1, s) \geq \rho_1(s) \geq \rho_3(s) = \rho_{\text{nlp}}^\mu(s), \quad s \in [\hat{c} - \delta, \hat{c}], \quad (4.76)$$

其中第一个不等式来自步骤 2, 第二个不等式来自 (4.75). 因为 $\hat{c} \in \mathcal{D}_\mu$, 对 $s \in [\hat{c}, c_2]$ 我们已有 $w_{3,*}(1, s) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(s)$. 考虑到 (4.76), 因此在 $\hat{c} - \delta \in \mathcal{D}_\mu$ 中我们得到矛盾. 步骤 4 完成且命题 4.3 完成. \square

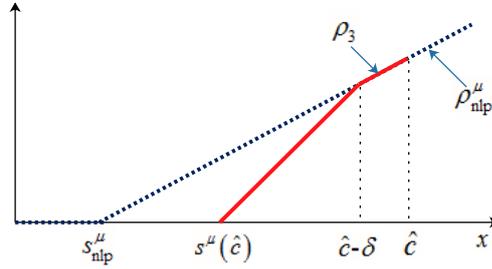


图 4.3 ρ_3 的典型剖面.

通过在命题 4.3 结论中我们去掉一个选择来改进命题 4.3.

命题 4.4 假设 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立. 如果 $\mu \in \mathcal{E}$, 那么 $\bar{c}_3 \leq \beta_3^\mu$, 其中 $\beta_3^\mu = \max\{s_{\text{nlp}}^\mu, c_{\text{LLW}}\}$. 这里 s_{nlp}^μ 由 (4.42) 给定.

证明. 如果命题 4.4 不成立, 即 $\bar{c}_3 > \beta_3^\mu$, 那么由命题 4.3, 我们得到

$$w_{3,*}(1, c) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(c), \quad c \in [\beta_3^\mu, c_2].$$

因为 $\beta_3^\mu \geq s_{\text{nlp}}^\mu$ (参见 (4.43) 里的 β_3^μ 的定义), 有 $(\beta_3^\mu, c_2) \subset (s_{\text{nlp}}^\mu, c_2)$. 由 (4.42) 里 s_{nlp}^μ 的定义可得

$$w_{3,*}(1, c) \geq \rho_{\text{nlp}}^\mu(c) > 0, \quad c \in (\beta_3^\mu, c_2). \quad (4.77)$$

由 (4.36), 可知对每一 $c \in (\beta_3^\mu, c_2)$ 有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_3 \left(\frac{1}{\epsilon}, \frac{c}{\epsilon} \right) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp \left(- \frac{w_{3,*}(1, c) + o(1)}{\epsilon} \right) = 0,$$

所以由 (4.77) 我们得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{ct < x < c_2 t} u_3(t, x) = 0, \quad c \in (\beta_3^\mu, c_2).$$

因此, 我们推出 $\bar{c}_3 \leq \beta_3^\mu$, 产生矛盾. 这完成了证明. \square

4.3.2.2 引导到 $\mu = 1$

在这小节我们继续证明 $\bar{c}_3 \leq \beta_3$, 其中 $\beta_3 = \max\{s_{\text{nlp}}, c_{\text{LLW}}\}$. 鉴于命题 4.4 (也可参见注记 4.9), 足以证明 $1 \in \mathcal{E}$. 我们将用连续的思想进行论证.

引理 4.12 假设 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立. 那么 $0 \in \mathcal{E}$.

证明. 从 (4.7) 注意到

$$\liminf_{\substack{(t', x') \rightarrow (t, x) \\ \epsilon \rightarrow 0}} u_2^\epsilon(t', x') \geq \chi_{\{\bar{c}_3 t < x < c_2 t\}}.$$

通过标准验证, 称 $w_{3,*}$ 是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + d_3 |\partial_x w|^2 + r_3(1 - a_{32} \chi_{\{\bar{c}_3 t < x < c_2 t\}}), w\} = 0, & (0, \infty) \times (0, \infty), \\ w(t, 0) = 0, & w(0, x) = \lambda x, & t \geq 0, x \geq 0, \end{cases}$$

的粘性上解, 其中 $\lambda \in (0, \infty]$ 由 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 给定, 和边界条件已在注记 4.8 验证. 命题 4.2 的直接应用有

$$w_{3,*}(t, x) \geq t\rho_4(x/t), \quad [0, \infty) \times [0, \infty), \quad (4.78)$$

其中 $\rho_4(s)$ 是

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3 |\rho'|^2 + r_3(1 - a_{32} \chi_{\{\bar{c}_3 < s < c_2\}}), \rho\} = 0, & (0, \infty), \\ \rho(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho(s)}{s} = \lambda. \end{cases} \quad (4.79)$$

的唯一的粘性解.

由 (4.38) 可知 ρ_{nlp}^0 是

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3 |\rho'|^2 + r_3(1 - a_{32} \chi_{\{s \leq c_2\}}), \rho\} = 0, & (0, \infty), \\ \rho(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho(s)}{s} = \lambda, \end{cases} \quad (4.80)$$

的唯一的粘性解.

参见 (4.79) 和 (4.80), 应用引理 4.3 令其 $c_g = c_2$ 和 $g = r_3 a_{32} \chi_{\{\bar{c}_3 < s < c_2\}}$ 或者 $g = r_3 a_{32} \chi_{\{s \leq c_2\}}$ 我们推出 $\rho_4(c_2) = \rho_{\text{nlp}}^0(c_2)$. 由此, 从 (4.78) 我们得到 $w_{3,*}(1, c_2) \geq \rho_4(c_2) = \rho_{\text{nlp}}^0(c_2)$, 所以由 (4.67) 里 \mathcal{E} 的定义可知 $0 \in \mathcal{E}$. \square

接下来我们叙述本节的主要结果.

命题 4.5 假设 $(u_i)_{i=1}^3$ 是 (1.3) 的解使得 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立. 那么

$$\bar{c}_3 \leq \beta_3 = \max\{s_{\text{nlp}}, c_{\text{LLW}}\},$$

其中 $s_{\text{nlp}} = s_{\text{nlp}}^\mu|_{\mu=1}$, 和 s_{nlp}^μ 由 (4.42) 给定的.

注记 4.11 由命题 4.5, 有 $\bar{c}_3 \leq \beta_3 = \max\{s_{\text{nlp}}, c_{\text{LLW}}\}$. 因此当 $t \gg 1$ 时物种 u_1 在区域 $\{(t, x) : \beta_3 t \leq x \leq c_2 t\}$ 里由物种 u_2 控制. 准确地说, 应用 (4.7) 我们推出

$$\limsup_{\substack{(t', x') \rightarrow (t, x) \\ \epsilon \rightarrow 0}} u_1^\epsilon(t', x') \leq \chi_{\{c_2 t \leq x \leq c_1 t\}} + \chi_{\{x \leq \beta_3 t\}},$$

其中 u_1^ϵ 由 (4.33) 定义.

命题 4.5 的证明. 应用命题 4.4, 我们将通过一个连续性论证 $1 \in \mathcal{E}$. 首先, \mathcal{E} 是闭的且非空的. 它是闭的因为 $\rho_{\text{nlp}}^\mu(c_2)$ 关于 μ 是连续的 (参见引理 4.6). 集合 \mathcal{E} 是非空的因为 $0 \in \mathcal{E}$, 这在引理 4.12 中被证明. 定义 $\mu_M = \sup \mathcal{E}$ 使得 $\mu_M \in [0, 1]$. 由 \mathcal{E} 的闭性, 有 $\mu_M \in \mathcal{E}$, 所以由命题 4.4 表明

$$\bar{c}_3 \leq \beta_3^{\mu_M}, \quad (4.81)$$

这里 $\beta_3^{\mu_M} = \max\{s_{\text{nlp}}^{\mu_M}, c_{\text{LLW}}\}$, 其中 $s_{\text{nlp}}^{\mu_M} \in (0, c_2)$ 由 (4.42) 给定. 如果 $s_{\text{nlp}}^{\mu_M} \leq c_{\text{LLW}}$, 那么通过 (4.81) 得到命题 4.5, 因为

$$\bar{c}_3 \leq \beta_3^{\mu_M} = c_{\text{LLW}} \leq \max\{s_{\text{nlp}}, c_{\text{LLW}}\} = \beta_3.$$

因此, 仍需考虑情形 $s_{\text{nlp}}^{\mu_M} > c_{\text{LLW}}$ 并证明 $\mu_M = 1$.

假设与此相反 $\mu_M < 1$ 和 $s_{\text{nlp}}^{\mu_M} > c_{\text{LLW}}$. 那么

$$\bar{c}_3 \leq \beta_3^{\mu_M} = \max\{s_{\text{nlp}}^{\mu_M}, c_{\text{LLW}}\} = s_{\text{nlp}}^{\mu_M}. \quad (4.82)$$

又由 (4.7), 我们得到

$$\liminf_{\substack{(t', x') \rightarrow (t, x) \\ \epsilon \rightarrow 0}} u_1^\epsilon(t', x') \geq \chi_{\{c_2 t < x < c_1 t\}} \quad \text{和} \quad \liminf_{\substack{(t', x') \rightarrow (t, x) \\ \epsilon \rightarrow 0}} u_2^\epsilon(t', x') \geq \chi_{\{s_{\text{nlp}}^{\mu_M} < x < c_2 t\}},$$

其中第二个不等式可由 (4.82) 得到. 在 (4.35) 里让 $\epsilon \rightarrow 0$, 由命题 4.8 里的 (4.115) 和注记 4.8, 可验证 $w_{3,*}$ 是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + d_3|\partial_x w|^2 + \overline{\mathcal{R}}_3(\frac{x}{t}), w\} = 0, & x > s_{\text{nlp}}^{\mu_M} t, \\ w(0, x) = \lambda x, & x \geq 0, \\ w(t, s_{\text{nlp}}^{\mu_M} t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (4.83)$$

的粘性上解, 其中 $\overline{\mathcal{R}}_3(s) = r_3(1 - a_{31}\chi_{\{c_2 < s < c_1\}} - a_{32}\chi_{\{s_{\text{nlp}}^{\mu_M} < s < c_2\}})$. 由命题 4.2, 推出

$$w_{3,*}(t, x) \geq t\rho_5(x/t), \quad x \geq s_{\text{nlp}}^{\mu_M} t, \quad (4.84)$$

其中 ρ_5 是

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + \overline{\mathcal{R}}_3(s), \rho\} = 0, & s \in (s_{\text{nlp}}^{\mu_M}, \infty), \\ \rho(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho(s)}{s} = \lambda. \end{cases} \quad (4.85)$$

的唯一的粘性解. 在下文中, 我们将会展示存在某一 $\mu_{\sharp} \in (\mu_M, 1)$ 使得 $\mu_{\sharp} \in \mathcal{E}$. 这与 $\mu_M = \sup \mathcal{E}$ 矛盾.

步骤 1. 选择某一 $\mu_{\sharp} \in (\mu_M, 1)$ 使得

$$\rho_{\text{nlp}}^{\mu_{\sharp}}(c_2) < \nu_1(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}) \cdot (c_2 - s_{\text{nlp}}^{\mu_M}), \quad (4.86)$$

其中 (参见 $\nu_1(\ell)$ 的定义里 (4.48))

$$\nu_1(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}) = \nu_1(\ell) \Big|_{\ell=s_{\text{nlp}}^{\mu_M}} = \frac{s_{\text{nlp}}^{\mu_M} + \sqrt{(s_{\text{nlp}}^{\mu_M})^2 - \alpha_3^2(1 - a_{32})}}{2d_3}.$$

实际上, 注意到 $s_{\text{nlp}}^{\mu_M} > c_{\text{LLW}} \geq \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}$. 由引理 4.8 和 $\lambda_{\text{nlp}}^{\mu_M}$ 的定义, 我们推出

$$\rho_{\text{nlp}}^{\mu_M}(c_2) = \lambda_{\text{nlp}}^{\mu_M}(c_2 - s_{\text{nlp}}^{\mu_M}) < \frac{s_{\text{nlp}}^{\mu_M}}{2d_3}(c_2 - s_{\text{nlp}}^{\mu_M}) < \nu_1(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}) \cdot (c_2 - s_{\text{nlp}}^{\mu_M}).$$

因此, 如在引理 4.6 陈述的 ρ_{nlp}^{μ} 关于 μ 的连续性, 选择 $\mu_{\sharp} \in (\mu_M, 1)$ 足够接近 μ_M , 以便于 (4.86) 成立.

步骤 2. $\mu_{\sharp} \in (\mu_M, 1)$ 如步骤 1 选取. 由引理 4.9 有

$$\rho_6(s) := \min\{\rho_{\text{nlp}}^{\mu_{\sharp}}(s), \nu_1(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}) \cdot (s - s_{\text{nlp}}^{\mu_M})\}$$

是

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + r_3(1 - a_{32}), \rho\} = 0, & (s_{\text{nlp}}^{\mu_M}, c_2), \\ \rho(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}) = 0, \quad \rho(c_2) = \rho_{\text{nlp}}^{\mu_{\sharp}}(c_2), \end{cases}$$

的粘性下解, 其中 $\nu_1(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}) = \nu_1(\ell)|_{\ell=s_{\text{nlp}}^{\mu_M}}$ 定义在步骤 1.

步骤 3. 由 (4.86), 存在 $\delta > 0$ 使得对 $s \in [c_2 - \delta, c_2]$ 有 $\rho_6(s) = \rho_{\text{nlp}}^{\mu_{\sharp}}(s)$. 定义

$$\rho_7(s) := \begin{cases} \rho_{\text{nlp}}^{\mu_{\sharp}}(s), & s \in (c_2, \infty), \\ \rho_{\text{nlp}}^{\mu_{\sharp}}(s) = \rho_6(s), & s \in [c_2 - \delta, c_2], \\ \rho_6(s), & s \in [s_{\text{nlp}}^{\mu_M}, c_2 - \delta]. \end{cases} \quad (4.87)$$

称 ρ_7 在整个区域 $(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}, \infty)$ 是 (4.85) 的粘性下解.

实际上, 因为 $\mu_{\sharp} < 1$, 可知 $\rho_{\text{nlp}}^{\mu_{\sharp}}$ 对 $(c_2 - \delta, \infty)$ 是 (4.85) 的粘性下解. 此外, 直接验证 ρ_6 对 $(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}, c_2)$ 是 (4.85) 的粘性下解. 注意到粘性解是局部性质, 推出由 (4.87) 给定的 ρ_7 对 $(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}, \infty)$ 是 (4.85) 的粘性下解.

步骤 4. 证明对 $s \in [s_{\text{nlp}}^{\mu_M}, c_1]$ 有 $\rho_5(s) \geq \rho_7(s)$.

注意到, 应用引理 4.3, 其中 $c_g = c_1$, 且由 ρ_5 的定义 (作为 (4.85) 的唯一的粘性解) 和 $\rho_{\text{nlp}}^{\mu_{\sharp}} = \rho_{\text{nlp}}^{\mu} |_{\mu=\mu_{\sharp}}$, 我们推出

$$\rho_5(s) = \rho_{\text{nlp}}^{\mu_{\sharp}}(s) = \rho_7(s), \quad s \geq c_1.$$

注意到 ρ_5 和 ρ_7 在有界区间 $(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}, c_1)$ 上是 (4.85) 的一对上下解, 其边界条件为

$$\rho_5(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}) \geq 0 = \rho_7(s_{\text{nlp}}^{\mu_M}) \quad \text{和} \quad \rho_5(c_1) = \rho_7(c_1).$$

通过 [94, 定理 2] 经典的比较原理, 对 $s \in [s_{\text{nlp}}^{\mu_M}, c_1]$ 有 $\rho_5(s) \geq \rho_7(s)$.

步骤 5. 称 $\mu_{\sharp} \in \mathcal{E}$, 这与 μ_M 的定义矛盾.

结合步骤 4 与 (4.84) 表明

$$w_{3,*}(1, c_2) \geq \rho_5(c_2) \geq \rho_7(c_2) = \rho_{\text{nlp}}^{\mu_{\sharp}}(c_2),$$

所以 $\mu_{\sharp} \in \mathcal{E}$, 当 $\mu_{\sharp} > \mu_M = \sup \mathcal{E}$ 它是不可能的.

因此 $\mu_M = 1$, 和 $\mathcal{E} = [0, 1]$. 我们在命题 4.4 取 $\mu = 1$ 建立 $\bar{c}_3 \leq \beta_3^{\mu} |_{\mu=1} = \beta_3$. 这完成了证明. \square

4.3.3 \underline{c}_3 的下界估计

对某 $c_1 > c_2$ 和 $\lambda \in (0, \infty]$ 有 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$. 定义连续函数 $\underline{\rho}_{\text{nlp}} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + \underline{\mathcal{R}}(s), \rho\} = 0, & (0, \infty), \\ \rho(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho(s)}{s} = \lambda, \end{cases} \quad (4.88)$$

的唯一的粘性解, 其中

$$\underline{\mathcal{R}}(s) = r_3(1 - a_{31}\chi_{\{c_2 < s \leq c_1\}} - a_{32}\chi_{\{s \leq c_2\}}) - r_3 a_{31} \chi_{\{s \leq \max\{s_{\text{nlp}}, c_{\text{LLW}}\}\}}, \quad (4.89)$$

其 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 和 c_{LLW} 分别由 (4.9) 和定义 4.3 给定.

与引理 4.6 相似的论证, 可知 $\underline{\rho}_{\text{nlp}}$ 是连续的且关于 $s \in [0, \infty)$ 是非递减的. 因此, 定义速度

$$\underline{\beta}_3 := \sup\{s : \underline{\rho}_{\text{nlp}}(s) = 0\}. \quad (4.90)$$

本小节的主要结果是建立了 \underline{c}_3 的下界, 并证明在 $s_{\text{nlp}} \geq c_{\text{LLW}}$ 的情况下, 这个下界与命题 4.5 中的上界估计一致.

命题 4.6 假设 $(u_i)_{i=1}^3$ 是 (1.3) 的解使得 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立. 那么有 $\underline{c}_3 \geq \underline{\beta}_3$, 其中 $\underline{\beta}_3$ 是 (4.90) 给定的且满足 $\underline{\beta}_3 \in [\alpha_3 \sqrt{1 - a_{31} - a_{32}}, s_{\text{nlp}}]$. 此外如果 $s_{\text{nlp}} \geq c_{\text{LLW}}$ 有 $\underline{\beta}_3 = s_{\text{nlp}}$, 其中 $s_{\text{nlp}} = s_{\text{nlp}}^\mu|_{\mu=1}$.

记 4.12 假设 $s_{\text{nlp}} \geq c_{\text{LLW}}$, 结合命题 4.5 和 4.6 表明

$$s_{\text{nlp}} \leq \underline{c}_3 \leq \bar{c}_3 \leq \max\{s_{\text{nlp}}, c_{\text{LLW}}\} = s_{\text{nlp}}.$$

因此在这样的情形下 $\bar{c}_3 = \underline{c}_3 = s_{\text{nlp}}$ 和命题 4.5 和 4.6 是最佳的.

在证明命题 4.6 之前我们建立一个引理.

引理 4.13 假设 $(u_i)_{i=1}^3$ 是 (1.3) 的解且 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立. 那么

$$w_3^*(1, s) \leq \underline{\rho}_{\text{nlp}}(s), \quad s \in [0, \infty),$$

其中 $\underline{\rho}_{\text{nlp}}$ 是 (4.88) 的唯一的粘性解.

证明. 应用 (4.7), 我们注意到

$$\limsup_{\substack{(t', x') \rightarrow (t, x) \\ \epsilon \rightarrow 0}} u_1^\epsilon(t', x') \leq \chi_{\{c_2 t \leq x \leq c_1 t\}} + \chi_{\{x \leq \beta_3 t\}} \quad \text{和} \quad \limsup_{\substack{(t', x') \rightarrow (t, x) \\ \epsilon \rightarrow 0}} u_2^\epsilon(t', x') \leq \chi_{\{x \leq c_2 t\}}.$$

对 (4.35) 让 $\epsilon \rightarrow 0$ 和应用注记 4.8 验证边界条件, 通过标准验证 w_3^* 是

$$\min\{\partial_t w + d_3|\partial_x w|^2 + \underline{\mathcal{R}}_1(x/t), w\} = 0, \quad (0, \infty) \times (0, \infty), \quad (4.91)$$

的粘性下解, 可知在 $s = c_2$ 上 1 是 u_1^ϵ 和 u_2^ϵ 的上界, 以便

$$\underline{\mathcal{R}}_1(s) = \begin{cases} \underline{\mathcal{R}}(s), & s \neq c_2, \\ r_3(1 - a_{31} - a_{32}), & s = c_2, \end{cases}$$

和 $\underline{\mathcal{R}}(s)$ 是定义在 (4.89).

注意 $\underline{\mathcal{R}}_1(s) \leq \underline{\mathcal{R}}(s)$, 所以我们不能直接应用比较原理, 需要小心行事. 由于在注记 4.7 所述 $w_3^*(t, x) = tw_3^*(1, \frac{x}{t})$, 通过引理 4.2 论证, 可以验证在粘性意义下, $\rho_3^*(s) := w_3^*(1, s)$ 满足

$$\min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + \underline{\mathcal{R}}_1(s), \rho\} \leq 0, \quad (0, \infty), \quad (4.92)$$

和满足

$$\rho_3^*(0) = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho_3^*(s)}{s} = \lambda.$$

称 $\rho_3^* \in \text{Lip}_{\text{loc}}([0, \infty))$. 实际上, 由于 $\underline{\mathcal{R}}_1(s) \geq 0$, 可以很容易地验证 $\rho_3^*(s)$ 在 $(0, \infty)$ 上是 $\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 = 0$ 的粘性下解. 固定任意 $s_0 > 0$, 并选择 $M = M(s_0) > 0$, 使得 $\rho(s_0) - s_0M + \frac{d_3}{2}M^2 > 0$, 然后直接应用 [64, 命题 1.14] 推出对于任意 $s_0 > 0$ 有 ρ_3^* 在 $[0, s_0]$ 上是 Lipschitz 连续的.

根据 Rademacher 定理, ρ_3^* 在 $[0, \infty)$ 上几乎处处是可微的. 作为 (4.92) 的粘性下解, 因此它在 $[0, \infty)$ 上几乎处处满足微分不等式 (4.92). 由于几乎处处有 $\underline{\mathcal{R}}_1(s) = \underline{\mathcal{R}}(s)$, 证明了 ρ_3^* 满足

$$\min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + \underline{\mathcal{R}}(s), \rho\} \leq 0, \quad (0, \infty). \quad (4.93)$$

然而, 根据 Hamiltonian 函数的凸性, 应用 [8, 命题 5.1] 我们推出 ρ_3^* 实际上是 (4.88) 的粘性下解, 其中 $\underline{\rho}_{\text{nlp}}$ 是唯一的粘性解. 因此引理通过命题 4.2 (可知 $w_3^*(t, x) = t\rho_3^*(x/t)$ 现在是 (4.91) 的粘性下解, 其中 $\underline{\mathcal{R}}_1$ 被 $\underline{\mathcal{R}}$ 取代) 通过标准的比较得到. \square

注记 4.13 *Hamiltonian* 函数的凸性保证了 (4.92) 和 (4.93) 的粘性下解的等价性. 粘性上解却不如此. 这就是为什么条件 (4.115) 在命题 4.3 步骤 2 的证明和验证 $w_{3,*}$ 是 (4.83) 的粘性上解的是必不可少的. 直观地说, 这表明 u_1 的演替 u_2 的所创建的“缺口”可能会加速但不会减慢 u_3 的入侵.

我们证明命题 4.6.

命题 4.6 的证明. **步骤 1.** 证明 $\underline{c}_3 \geq \underline{\beta}_3$. 由引理 4.13, 在 $(0, \infty)$ 有 $0 \leq w_3^*(1, s) \leq \underline{\rho}_{\text{nlp}}(s)$, 其表明

$$\{s : w_3^*(1, s) = 0\} \supset \{s : \underline{\rho}_{\text{nlp}}(s) = 0\} = [0, \underline{\beta}_3].$$

因此, 由 (4.37), 在 $\{(t, x) : 0 \leq x < \underline{\beta}_3 t\}$ 有 $w_3^*(t, x) = 0$. 由 (4.36) 里 w_3^* 的定义, 可知当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时在 $\{(t, x) : 0 \leq x < \underline{\beta}_3 t\}$ 上是局部一致地有 $w_3^\epsilon(t, x) = -\epsilon \log u_3^\epsilon(t, x) \rightarrow 0$. 对每一个小的 $\eta > 0$, 在引理 4.4 里的选择紧集 K, K' 为

$$K = \{(1, s) : 2\eta \leq s \leq \underline{\beta}_3 - 2\eta\} \text{ 和 } K' = \{(1, s) : \eta \leq s \leq \underline{\beta}_3 - \eta\}.$$

由于对所有的 (t, x) 和 $i = 1, 2$ 有 $0 \leq u_i \leq 1$,

$$\sup_{(t,x) \in K'} u_1^\epsilon(t, x) \leq 1 \text{ 和 } \sup_{(t,x) \in K'} u_2^\epsilon(t, x) \leq 1.$$

应用引理 4.4 我们推出

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{2\eta t \leq x \leq (\underline{\beta}_3 - 2\eta)t} u_3(t, x) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K u_3^\epsilon(t, x) > 0.$$

这表明 $\underline{c}_3 \geq \underline{\beta}_3$, 并步骤 1 完成了.

步骤 2. 证明 $\underline{\beta}_3 \leq s_{\text{nlp}}$. 直接验证 $\rho_{\text{nlp}} = \rho_{\text{nlp}}^\mu|_{\mu=1}$ (当 $\mu = 1$ 时由 (4.38) 给定) 是 (4.88) 的粘性下解. 再次应用推论 4.2 我们得到

$$\underline{\rho}_{\text{nlp}}(s) \geq \rho_{\text{nlp}}(s), \quad [0, \infty).$$

由 $\underline{\beta}_3$ 和 s_{nlp} 的定义 (参见当 $\mu = 1$ 时的 (4.90) 和 (4.42)), 我们推出

$$\underline{\beta}_3 = \sup\{s : \underline{\rho}_{\text{nlp}}(s) = 0\} \leq \sup\{s : \rho_{\text{nlp}}(s) = 0\} = s_{\text{nlp}}. \quad (4.94)$$

步骤 3. 称 $\underline{\beta}_3 \geq \alpha_3 \sqrt{1 - a_{31} - a_{32}}$. 对这种情形, 注意到 $\rho_8(s) := \max\{\frac{s^2}{4d_3} - r_3(1 - a_{31} - a_{32}), 0\}$ 是 (4.88) 的粘性上解, 这样就可以像步骤 2 得到不等式 $\underline{\beta}_3 \geq \alpha_3 \sqrt{1 - a_{31} - a_{32}}$.

步骤 4. 证明如果 $s_{\text{nlp}} \geq c_{\text{LLW}}$ 有 $\underline{\beta}_3 = s_{\text{nlp}}$. 假设 $s_{\text{nlp}} \geq c_{\text{LLW}}$, 那么 $\underline{\beta}_3 = s_{\text{nlp}}$. 这足以表明 ρ_{nlp} 是 (4.88) 的粘性解. 实际上, 如果是这种情况, 那么根据引理 4.3 中的

唯一性, 我们可推出在 $[0, \infty)$ 有 $\underline{\rho}_{\text{nlp}} = \rho_{\text{nlp}}$. 因此, 在 (4.94) 中的等式成立, 我们得到 $\underline{\beta}_3 = s_{\text{nlp}}$.

为了证明 ρ_{nlp} 是 (4.88) 的粘性解, 注意由于 ρ_{nlp} 已经是 (4.88) 的粘性下解, 这仍需验证在 $(0, \infty)$ 它是 (4.88) 的粘性上解. 为此, 假设 $\rho_{\text{nlp}} - \phi$ 在 $s_0 > 0$ 处达到一个严格的局部最小值. 考虑到 $\rho_{\text{nlp}} \geq 0$, 它足以表明

$$\rho_{\text{nlp}}(s_0) - s_0\phi'(s_0) + d_3|\phi'(s_0)|^2 + (\underline{\mathcal{R}})^*(s_0) \geq 0, \quad (4.95)$$

其中 $(\underline{\mathcal{R}})^*(s) = \limsup_{s' \rightarrow s} \underline{\mathcal{R}}(s')$ 是 $\underline{\mathcal{R}}$ 的上包络. $\mathcal{R}^1(s)$ 由 (4.38) 给定, 那么对 $s \geq 0$ 有 $\underline{\mathcal{R}}(s) = \mathcal{R}^1(s) - r_3 a_{31} \chi_{\{s \leq \beta_3\}}$. 因为 $\mathcal{R}^1(s)$ 关于 $\beta_3 \in (0, c_2)$ 是连续的,

$$(\underline{\mathcal{R}})^*(s) = (\mathcal{R}^1)^*(s), \quad s \geq \beta_3. \quad (4.96)$$

如果 $s_0 \geq s_{\text{nlp}}$, 注意到 $\beta_3 = s_{\text{nlp}}$, 那么有 $s_0 \geq \beta_3$. 那么由 (4.96) 和 ρ_{nlp} 是 (4.38) 的粘性解得到 (4.95).

如果 $s_0 < s_{\text{nlp}}$, 那么根据 s_{nlp} 的定义, 我们可以看到 $\rho_{\text{nlp}}(s)$ 在 s_0 附近消失, 因此 $\phi'(s_0) = 0$, 从而

$$\rho_{\text{nlp}}(s_0) - s_0\phi'(s_0) + d_3|\phi'(s_0)|^2 + (\underline{\mathcal{R}})^*(s_0) = \underline{\mathcal{R}}(s_0) \geq r_3(1 - a_{31} - a_{32}) > 0,$$

其表明 (4.95) 成立. 因此, ρ_{nlp} 是 (4.88) 的粘性上解. \square

我们现证明定理 A.

定理 A 的证明. 定理 A 中估计的 (4.12) 是命题 4.5, 4.6 和引理 4.7 的直接结果. 当 $s_{\text{nlp}} \geq c_{\text{LLW}}$ 时注记 4.12 证明了 $\underline{c}_3 = \bar{c}_3 = s_{\text{nlp}}$. 因此, 仍需证明对每一小的 $\eta > 0$ 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq x < (c_3 - \eta)t} u_3(t, x) > 0. \quad (4.97)$$

然后传播性质 (4.13) 是从假设 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 里的 (4.7) 得到的. 由 $u_1 \leq 1$ 和 $u_2 \leq 1$ 可以看出 u_3 是

$$\begin{cases} \partial_t u = d_3 \partial_{xx} u + r_3 u(1 - a_{31} - a_{32} - u), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_3(0, x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

的经典的上解. 由 Fisher [42] 或者 Kolmogorov 等 [67] 的经典结果, 对每一小的 $\eta > 0$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{|x| < (\underline{\sigma}_3 - \eta)t} u(t, x) \geq (1 - a_{31} - a_{32})/2 > 0, \quad (4.98)$$

其中 $\underline{\sigma}_3 := \alpha_3 \sqrt{1 - a_{31} - a_{32}}$. 因此, 为了证明 (4.97), 只需证明对每一小的 $\eta > 0$, 存在某一 $T > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得

$$u_3(t, x) \geq \delta, \quad \{(t, x) : t \geq T, (-\underline{\sigma}_3 + \eta)t \leq x \leq (\underline{c}_3 - \eta)t\}. \quad (4.99)$$

固定小的 $\eta > 0$. 由 \underline{c}_3 的定义, 存在某一 $c'_3 \in (\underline{c}_3 - \eta, \underline{c}_3)$ 和 $T > 0$ 使得

$$\inf_{t \geq T} u_3(t, c'_3 t) > 0. \quad (4.100)$$

因为 $\{(T, x) : (-\underline{\sigma}_3 + \eta)T \leq x \leq c'_3 T\}$ 是紧的, 应用 (4.98) 我们得到

$$\inf_{(-\underline{\sigma}_3 + \eta)T \leq x \leq c'_3 T} u_3(T, x) > 0. \quad (4.101)$$

由 (4.98), (4.100) 和 (4.101), 我们推出

$$\delta := \min \left\{ \inf_{t \geq T} u_3(t, c'_3 t), \inf_{t \geq T} u_3(t, (-\underline{\sigma}_3 + \eta)t), (1 - a_{31} - a_{32})/2, \inf_{(-\underline{\sigma}_3 + \eta)T \leq x \leq c'_3 T} u_3(T, x) \right\}$$

是正的. 那么 u_3 是 KPP 方程 $\partial_t u = d_3 \partial_{xx} u + r_3 u(1 - a_{31} - a_{32} - u)$ 的上解且在抛物边界上有 $u_3 \geq \delta$. 由抛物最大值原理, 我们推出 (4.99) 和完成定理 A 的证明. \square

4.4 最终区域的渐近性态

本节的目的是证明定理 B, 它描述了竞争物种在最终区域 $\{(t, x) : 0 < x < \underline{c}_3 t\}$ 的渐近性态.

定理 B 的证明. 由 (4.98) 和 \underline{c}_3 的定义, 明显地有 $\underline{c}_3 \geq \alpha_3 \sqrt{1 - a_{31} - a_{32}}$. 因此, 仍需证明 (4.15). 我们将证明分为几个步骤.

步骤 1. 证明对每一小的 $\eta > 0$, 如果有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(-\underline{\sigma}_3 + \eta)t < x < (\underline{c}_3 - \eta)t} u_i \leq B_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.102)$$

其中常数 $B_i \in [0, 1]$, 那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{(-\sigma_3 + \eta)t < x < (c_3 - \eta)t} u_3 \geq A, \quad (4.103)$$

其中 $A = 1 - a_{31}B_1 - a_{32}B_2$. 假设 (4.103) 不成立. 那么存在 (t_n, x_n) 使得

$$c_n := x_n/t_n \rightarrow c \in (-\sigma_3, c_3) \text{ 和 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_3(t_n, x_n) < A. \quad (4.104)$$

记 $(u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})(t, x) := (u_1, u_2, u_3)(t_n + t, x_n + x)$. 考虑到对 $i = 1, 2, 3$ 在 $[-t_n, \infty) \times \mathbb{R}$ 上有 $0 \leq u_{i,n} \leq 1$, 通过抛物估计称在 $C_{\text{loc}}^2(K)$ 上 $(u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$ 是预紧的, 其中 $K \subset \mathbb{R}^2$ 是某一紧子集. 如果需要取一子序列, 假设在 $C_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ 上有 $u_{3,n} \rightarrow \hat{u}_3$, 由 (4.102) 可知, 它在 \mathbb{R}^2 上满足 $\partial_t \hat{u}_3 - d_3 \partial_{xx} \hat{u}_3 \geq r_3 \hat{u}_3 (A - \hat{u}_3)$.

从 (4.99) 注意到在 \mathbb{R}^2 上有 $\hat{u}_3(t, x) > \delta$. $\underline{U}_3(t)$ 表示

$$U_3' = r_3 U_3 (A - U_3) \quad \text{和} \quad U_3(0) = \delta,$$

的解, 它满足 $\underline{U}_3(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{U}_3(t) = A$. 对每一 $T_1 > 0$, 对所有的 $x \in \mathbb{R}$ 有 $\hat{u}_3(-T_1, x) \geq \underline{U}_3(0)$. 通过比较原理, 有 $\hat{u}_3(t, x) \geq \underline{U}_3(t + T_1)$ for $(t, x) \in [-T_1, 0] \times \mathbb{R}$, 因此对每一 $T_1 > 0$ 有 $\hat{u}_3(0, 0) \geq \underline{U}_3(T_1)$. 令 $T_1 \rightarrow \infty$, 我们得到 $\hat{u}_3(0, 0) \geq A$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_3(t_n, x_n) \geq A$, 与 (4.104) 矛盾. 因此, (4.103) 成立.

步骤 2. 证明对每一小的 $\eta > 0$, 如果有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{(-\sigma_3 + \eta)t < x < (c_3 - \eta)t} u_3 \geq A,$$

其中 $A \in [0, 1]$, 那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(-\sigma_3 + \eta)t < x < (c_3 - \eta)t} u_i \leq B_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.105)$$

其中 $B_i = \max\{1 - a_{i3}A, 0\}$.

因为这类似于步骤 1 中的论证, 所以我们省略了细节.

步骤 3. 证明如果 $1 < a_{23} \leq a_{13}$, 那么对每一小的 $\eta > 0$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(-\sigma_3 + \eta)t < x < (c_3 - \eta)t} |u_1(t, x)| = 0; \quad (4.106)$$

如果 $1 < a_{13} \leq a_{23}$, 那么对每一小的 $\eta > 0$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(-\sigma_3 + \eta)t < x < (c_3 - \eta)t} |u_2(t, x)| = 0. \quad (4.107)$$

我们只探讨情况 $1 < a_{23} \leq a_{13}$ 和证明(4.106), 而通过转换 u_1 和 u_2 的角色我们可得到 (4.107). 将通过应用步骤 1 和步骤 2 归纳定义 $B_{1,j}, B_{2,j}, A_j$. 首先, 令 $B_{1,1} = B_{2,1} = 1$ 并应用步骤 2, 所以对 $A = A_1 = 1 - a_{31} - a_{32}$ 有 (4.103) 成立. 然后让步骤 2 中的 $A = A_1$, 对 $i = 1, 2$ 我们推出 (4.105) 其中 $B_i = B_{i,2} = \max\{1 - a_{i3}A_1, 0\}$. 循环地, 如果对某一 $m > 1$ 有 $1 - a_{13}A_m > 0$, 那么 $1 - a_{23}A_m > 0$ (由 $a_{13} \geq a_{23}$) 和

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= 1 - a_{31}(1 - a_{13}A_m) - a_{32}(1 - a_{23}A_m) \\ &= A_1 + (a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23})A_m = \sum_{n=0}^m (a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23})^n A_1, \end{aligned} \quad (4.108)$$

因此对 $A = A_{m+1}$ 有 (4.103). 从 (4.108) 中注意到 $A_{m+1} > A_m$. 称存在某一 $m_0 > 1$ 使得 $1 - a_{13}A_{m_0} \leq 0$, 然后应用在步骤 3 中 (4.105) 其中 $A = A_{m_0}$, 我们推出 (4.106).

为此, 我们反证, 并假设对于所有 $m > 1$ 有 $1 - a_{13}A_m > 0$, 所以对所有 m 有 (4.108). 可通过以下两种情况我们得出矛盾:

(i) 如果 $a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} \geq 1$, 那么通过选择某一 $m_0 \geq \frac{1}{a_{13}A_1}$, 由 (4.108) 得到 $1 - a_{13}A_{m_0} \leq 1 - a_{13}m_0A_1 \leq 0$, 这得到了矛盾;

(ii) 如果 $a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} < 1$, 那么在 (4.108) 让 $m \nearrow \infty$ 得到

$$A_\infty = \frac{A_1}{1 - (a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23})} = \frac{1 - a_{31} - a_{32}}{1 - (a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23})} \geq 1,$$

其中不等式由 $a_{13} > 1$ 和 $a_{23} > 1$ 得到. 因此, 选择足够大的 m_0 使得 $1 - a_{13}A_{m_0} \leq 0$, 这得到了矛盾.

因此, (4.106) 成立.

步骤 4. 证明 (4.15). 证明是基于 (1.3) 的整体解的分类. 我们只考虑情况 $1 < a_{23} \leq a_{13}$, 因为对于情况 $1 < a_{13} \leq a_{23}$, (4.15) 可以用同样的方法证明. 由步骤 3 中的(4.106), 仍需证明对每一小的 $\eta > 0$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(-\sigma_3 + \eta)t < x < (\sigma_3 - \eta)t} (|u_2(t, x)| + |u_3(t, x) - 1|) = 0. \quad (4.109)$$

假设 (4.109) 不成立. 那么存在 (t_n, x_n) 使得

$$c_n := x_n/t_n \rightarrow c \in (-\sigma_3, c_3) \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_2(t_n, x_n) > 0 \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_3(t_n, x_n) < 1.$$

和之前一样, 也标记 $(u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})(t, x) := (u_1, u_2, u_3)(t_n + t, x_n + x)$. 由抛物估计, 假设在 $C_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ 取子序列有 $(u_{2,n}, u_{3,n})$ 收敛到 (\hat{u}_2, \hat{u}_3) . 由 (4.106), 可知 (\hat{u}_2, \hat{u}_3) 满足

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}_2 - \partial_{xx} \hat{u}_2 = \hat{u}_2(1 - \hat{u}_2 - a_{23} \hat{u}_3), & \mathbb{R}^2, \\ \partial_t \hat{u}_3 - d_3 \partial_{xx} \hat{u}_3 = r_3 \hat{u}_3(1 - a_{32} \hat{u}_2 - \hat{u}_3), & \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

又由定理 A 的证明中的 (4.99), 对所有 $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ 有 $(\hat{u}_2, \hat{u}_3)(t, x) \preceq (1, \delta)$. 让 $(\bar{U}_2, \underline{U}_3)$ 表示 ODEs

$$U_2' = U_2(1 - U_2 - a_{23}U_3) \quad \text{和} \quad U_3' = r_3U_3(1 - a_{32}U_2 - U_3),$$

的解其中初值为 $(\bar{U}_2, \underline{U}_3)(0) = (1, \delta)$, 所以由 $a_{32} < 1 < a_{23}$ 有 $(\bar{U}_2, \underline{U}_3)(\infty) = (0, 1)$.

类似于步骤 1, 通过比较, 我们得到 $(\hat{u}_2, \hat{u}_3)(0, 0) \preceq (\bar{U}_2, \underline{U}_3)(\infty) = (0, 1)$, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $u_2(t_n, x_n) \rightarrow 0$ 和 $u_3(t_n, x_n) \rightarrow 1$, 这产生了矛盾. 因此, (4.109) 成立. 至此我们完成定理 B 的证明. \square

注记 4.14 对 $c_1 > c_2$, 假设 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立. 假设 $a_{13} > a_{31}$ 和 $a_{23} < a_{32}$ (替换定理 B 中的 $a_{13}, a_{23} > 1$), 那么对每一小的 $\eta > 0$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 < x < (c_3 - \eta)t} (|u_1(t, x) - U_1^*| + |u_2(t, x) - U_2^*| + |u_3(t, x) - U_3^*|) = 0,$$

其中 (U_1^*, U_2^*, U_3^*) 是 (1.3) 的唯一的正平衡点. 在这种情况下, [18, 命题 1] 能够被应用对 (1.3) 产生一个严格凸的 *Lyapunov* 函数. 然后, 我们可以类似于 [106], 对三物种竞争系统 (1.3) 的正的整体解进行完全分类. 此处我们省略了细节.

4.5 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 的性质

这节我们专心于证明注记 4.3 和命题 4.1. 因为 $s_{\text{nlp}} \leq \sigma_3(\lambda)$ 在引理 4.7 得到, 注记 4.3 由以下结果得到.

命题 4.7 假设 $c_1 > c_2$ 和 $\lambda \in (0, \infty]$, s_{nlp} 定义在 (4.9). 那么 $s_{\text{nlp}} \geq \alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}}$. 此外, 如果 $a_{31} < a_{32}$ 和 $\alpha_3 < c_2 < c_1 < \alpha_3(\sqrt{a_{32}} + \sqrt{1 - a_{32}})$, 那么 $s_{\text{nlp}} > \alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}}$, 其中 $\alpha_3 = 2\sqrt{d_3 r_3}$.

证明. 步骤 1. 证明 $s_{\text{nlp}} \geq \alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}}$. 此证明依赖于粘性上下解的构造和引理 4.2 的应用. 定义 $\bar{\rho} : [0, c_1] \rightarrow [0, \infty)$ 由以下

$$\bar{\rho}(s) := \begin{cases} \bar{\lambda}s - d_3 \bar{\lambda}^2 + \bar{r}, & c_2 < s \leq c_1, \\ \frac{s^2}{4d_3} - r_3(1 - a_{32}), & \alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}} < s \leq c_2, \\ 0, & 0 \leq s \leq \alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}}, \end{cases}$$

其中 $\bar{\lambda} = \frac{c_1 - c_2}{4d_3} + \frac{r_3(1 - a_{32})}{c_1 - c_2}$ 和 $\bar{r} = d_3 \left[\frac{c_1 - c_2}{4d_3} - \frac{r_3(1 - a_{32})}{c_1 - c_2} \right]^2$. 在区间 $(0, c_1)$ 证明 $\bar{\rho}$ 是 (4.8) 的粘性上解. 令 $A := \frac{c_1 - c_2}{4d_3}$ 和 $B := \frac{r_3(1 - a_{32})}{c_1 - c_2}$. 验证 $\bar{\rho}$ 在 $[0, c_1]$ 上是连续的通过下面在 $s = c_2$ 点的计算:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}c_2 - d_3 \bar{\lambda}^2 + \bar{r} &= c_2 \left[A + B + \frac{c_2}{2d_3} \right] - d_3 \left[A + B + \frac{c_2}{2d_3} \right]^2 + \bar{r} \\ &= c_2 [A + B] + \frac{(c_2)^2}{2d_3} - d_3 [A + B]^2 - c_2 [A + B] - \frac{(c_2)^2}{4d_3} + \bar{r} \\ &= \frac{(c_2)^2}{4d_3} - d_3 [A + B]^2 + d_3 [A - B]^2 \\ &= \frac{(c_2)^2}{4d_3} - 4d_3 AB = \frac{(c_2)^2}{4d_3} - r_3(1 - a_{32}). \end{aligned}$$

注意到在集合 $(0, c_1) \setminus \{c_2, \alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}}\}$ 上 $\bar{\rho}$ 是 (4.8) 的经典的的上解. 因为通过构造有 $\bar{\rho} \geq 0$, 仍需考虑当 $\bar{\rho} - \phi$ 在点 $\hat{s} = c_2$ 或 $\hat{s} = \alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}}$ 达到严格的局部最小值的情况, 其中 $\phi \in C^1(0, \infty)$ 是试验函数. 当 $\hat{s} = c_2$, 在点 $s = \hat{s}$ 直接计算有

$$\bar{\rho}(\hat{s}) - \hat{s}\phi' + d_3|\phi'|^2 + \mathcal{R}^*(\hat{s}) \geq \frac{(c_2)^2}{4d_3} - c_2\phi' + d_3|\phi'|^2 = d_3 \left(\phi' - \frac{c_2}{2d_3} \right)^2 \geq 0.$$

另一方面, 如果 $\hat{s} = \alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}}$, 那么在点 $s = \hat{s}$, 计算

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\hat{s}) - \hat{s}\phi' + d_3|\phi'|^2 + \mathcal{R}^*(\hat{s}) &= -\alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}}\phi' + d_3|\phi'|^2 + r_3(1 - a_{32}) \\ &= d_3 \left[\phi' - \sqrt{\frac{r_3(1 - a_{32})}{d_3}} \right]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

因此, $\bar{\rho}$ 是 (4.8) 的粘性上解.

可知 ρ_{nlp} 是 (4.8) 的唯一的粘性解. 注意到 $\rho_{\text{nlp}}(0) = 0 = \bar{\rho}(0)$. 为了应用引理 4.2, 验证边界条件 $\bar{\rho}(c_1) \geq \rho_{\text{nlp}}(c_1)$. 首先, 由引理 4.3 其中 $c_g = c_1$, 它容易得到 $\rho_{\text{nlp}}(c_1) \leq c_1^2/(4d_3) - r_3(1 - a_{31})$. 记 $\bar{\lambda} = \frac{c_1}{2d_3} - D$ 和 $\bar{r} = d_3D^2$, 其中 $D = \frac{c_1 - c_2}{4d_3} - \frac{r_3(1 - a_{32})}{c_1 - c_2}$, 验证

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(c_1) &= \bar{\lambda}c_1 - d_3\bar{\lambda}^2 + \bar{r} = c_1 \left[\frac{c_1}{2d_3} - D \right] - d_3 \left[\frac{c_1}{2d_3} - D \right]^2 + d_3D^2 \\ &= \frac{c_1^2}{2d_3} - c_1D - d_3 \left[\frac{c_1^2}{4d_3^2} - \frac{c_1D}{d_3} + D^2 \right] + d_3D^2 = \frac{c_1^2}{4d_3} \geq \rho_{\text{nlp}}(c_1). \end{aligned}$$

通过应用引理 4.2 其中 $c_b = c_1$, 我们推出对 $s \in [0, c_1]$ 有 $\bar{\rho}(s) \geq \rho_{\text{nlp}}(s)$. 特别地, $0 \leq \rho_{\text{nlp}}(\alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}) \leq \bar{\rho}(\alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}) = 0$. 因此, 由定义, 有 $s_{\text{nlp}} = \sup\{s \geq 0 : \rho_{\text{nlp}}(s) = 0\} \geq \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}$, 这完成了步骤 1.

步骤 2. 证明如果 $a_{31} < a_{32}$ 和 $\alpha_3 < c_2 < c_1 < \alpha_3(\sqrt{a_{32}} + \sqrt{1 - a_{32}})$ 有 $s_{\text{nlp}} > \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}$. 由于 $a_{31} < a_{32}$, 可验证 ρ_{nlp} 是

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + r_3(1 - a_{32}\chi_{\{s \leq c_1\}}), \rho\} = 0, & (0, \infty), \\ \rho(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho(s)}{s} = \lambda, \end{cases} \quad (4.110)$$

的粘性下解. 设 $\bar{\rho}$ 是 (4.110) 唯一的粘性解. 推论 4.2 表明对所有 $s \in (0, \infty)$ 有 $\rho_{\text{nlp}}(s) \leq \bar{\rho}(s)$. 通过与引理 4.2 的证明相同的论证, 可验证 $\bar{w}(t, x) := t\bar{\rho}(\frac{x}{t})$ 是

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + d_3|\partial_x w|^2 + r_3(1 - a_{32}\chi_{\{x \leq c_1 t\}}), w\} = 0, & (0, \infty) \times (0, \infty), \\ w(0, x) = \lambda x, \quad w(t, 0) = 0, & x \in [0, \infty), t \in (0, \infty). \end{cases} \quad (4.111)$$

的粘性解.

定义 $\underline{s}_{\text{nlp}} > 0$ 使得 $\{(t, x) : \bar{w}(t, x) = 0\} = \{(t, x) : t > 0 \text{ 和 } x \leq \underline{s}_{\text{nlp}}t\}$. 因为 $c_1 < \alpha_3(\sqrt{a_{32}} + \sqrt{1 - a_{32}})$, 在第三章定理 3.1 中 (3.4) 已证明

$$\underline{s}_{\text{nlp}} > \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}.$$

(为了应用第三章定理 3.1, 变换 $\tilde{w}(s, y) := \bar{w}\left(\frac{s}{r_3}, \sqrt{\frac{d_3}{r_3}}y\right)$.) 考虑到 $\bar{\rho}(\underline{s}_{\text{nlp}}) = \bar{w}(1, \underline{s}_{\text{nlp}}) = 0$, 有 $0 \leq \rho_{\text{nlp}}(\underline{s}_{\text{nlp}}) \leq \bar{\rho}(\underline{s}_{\text{nlp}}) = 0$. 由定义, 可得 $s_{\text{nlp}} = \sup\{s \geq 0 : \rho_{\text{nlp}}(s) = 0\} \geq \underline{s}_{\text{nlp}} > \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}$. \square

接下来我们证明命题 4.1. 首先我们准备下面的结果:

引理 4.14 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 定义在 (4.9). 那么 s_{nlp} 对 $\lambda \in (0, \infty]$ 是连续的和非递增的.

证明. 与引理 4.6 类似, 可证明 ρ_{nlp} 对 λ 是非递增的和连续的. 这表明 s_{nlp} 关于 λ 是非递增的且连续的. 此处我们忽略细节. \square

命题 4.1 的证明. 证明分为两步.

步骤 1. 证明存在某一 $\delta > 0$ 和 $\lambda \in (0, \infty)$ 使得对所有 $a_{31} \in [0, \delta)$ 有 (i) $\sigma_3(\lambda) = d_3\lambda + \frac{r_3}{\lambda} < \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1)$ 和 (ii) $s_{\text{nlp}}(c_1, \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1), \lambda) > c_{\text{LLW}}$. 这里 \hat{s}_{nlp} 和 s_{nlp} 分别定义在 (4.5) 和 (4.9).

首先, 我们考虑 $a_{31} = 0$. 称存在 $\bar{\lambda} \in (0, \sqrt{r_3/d_3})$ 使得

$$\alpha_3 < \bar{\sigma}_3 = \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1) = s_{\text{nlp}}(c_1, \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1), \bar{\lambda}), \quad (4.112)$$

其中 $\bar{\sigma}_3 := d_3\bar{\lambda} + \frac{r_3}{\bar{\lambda}}$. 实际上, 因为 $\alpha_3 = 2\sqrt{d_3r_3} < \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1)$ (参见 (4.24)), 选择唯一的 $\bar{\lambda} \in (0, \sqrt{r_3/d_3})$ 所以 (4.112) 的第一个等式成立. 同时, (4.112) 的第一个不等式由 $\bar{\lambda} \in (0, \sqrt{r_3/d_3})$ 可得. 接下来, 证明 $\bar{\sigma}_3 = s_{\text{nlp}}(c_1, \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1), \bar{\lambda})$. 为此, 我们注意到

$$\bar{\rho}(s) := \max \{ \bar{\lambda} \cdot (s - \bar{\sigma}_3), 0 \}$$

是

$$\min \{ \rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + \mathcal{R}(s), \rho \} = 0, \quad (0, \infty), \quad (4.113)$$

的唯一粘性解, 其中 $\mathcal{R}(s) = r_3(1 - a_{32}\chi_{\{s \leq \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1)\}})$. 然而, 由 $a_{31} = 0$ 和 (4.112) 的第一个等式可知, $\bar{\rho}$ 也是 (4.8) 的唯一粘性解, 其中 $c_2 = \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1)$ 和 $\lambda = \bar{\lambda}$. 因此 $\bar{\sigma}_3 = s_{\text{nlp}}(c_1, \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1), \bar{\lambda})$. 现在, 如果我们考虑对小的 $\epsilon > 0$ 有 $\lambda = \bar{\lambda} + \epsilon$, 然后

$$\sigma_3(\lambda) < \bar{\sigma}_3 = \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1) \quad \text{和} \quad s_{\text{nlp}}(c_1, \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1), \lambda) > \alpha_3,$$

其利用了对 λ 的连续依赖 (引理 4.14). 这证明了 $a_{31} = 0$ 时的步骤 1. 因为所有的不等式都是严格的, 当 $0 < a_{31} \ll 1$ 时由 a_{31} 的连续依赖性可得.

步骤 2. 证明对步骤 1 选择的 λ 有 (4.13), (4.14), 和 (4.15). 首先, 竞争层次条件 (4.4), (4.11), 和 $a_{21}a_{12} < 1$ 表明 $\hat{c}_{\text{LLW}} = 2\sqrt{1 - a_{21}}$ 如在注记 4.1 里叙述的一样.

因为对于选择的 λ 有 $\sigma_3(\lambda) < \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1)$, 应用定理 4.2 我们推出当 $c_1 = 2\sqrt{d_1 r_1}$ 和 $c_2 = \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1)$ 有 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$.

由于 (4.4) 和 (4.11) 也成立, 所以定理 A 适用. 特别地, (4.13) 成立. 考虑到 $s_{\text{nlp}}(c_1, \hat{s}_{\text{nlp}}(c_1), \lambda) > \alpha_3 \geq c_{\text{LLW}}$ (对最后一个不等式参见注记 4.4), 因此 (4.14) 成立. 最后, 由 $a_{13} > 1$ 和 $a_{23} > 1$, 命题 (4.15) 是定理 B 的直接结果. 命题 4.1 已证明. \square

4.6 一些有用的引理

在这节, 我们介绍本章中用到的一些引理. 第一个结果称为线性确定性是基于 [69, 定理 2.1]. 相关结果见 [59, 60].

引理 4.15 c_{LLW} 由定义 4.3 给定的. 假设

$$d_3 \geq \frac{1}{2}, \quad a_{32}(1 - a_{21}) < 1 < \frac{a_{23}}{1 - a_{21}}, \quad \text{和} \quad a_{32}a_{23} < 1. \quad (4.114)$$

那么 $c_{\text{LLW}} = \alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}(1 - a_{21})}$.

证明. (u, v) 是 (4.10) 的解. 那么 $(U, V)(s, y) := \left(\frac{u}{1 - a_{21}}, v \right) \left(\frac{s}{r_3}, \sqrt{\frac{d_3}{r_3}} y \right)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_s U - \hat{d}_3 \partial_{yy} U = \hat{r}_3 U(1 - U - \hat{a}_{23} V), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ \partial_s V - \partial_{yy} V = V(1 - \hat{a}_{32} U - V), & (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中 $\hat{d}_3 = \frac{1}{d_3}$, $\hat{r}_3 = \frac{1 - a_{21}}{r_3}$, $\hat{a}_{23} = \frac{a_{23}}{1 - a_{21}}$, 和 $\hat{a}_{32} = a_{32}(1 - a_{21})$. 在这些记号下, 我们观察到 (4.114) 等价于

$$\hat{d}_3 \leq 2, \quad \hat{a}_{32} < 1 < \hat{a}_{23} \quad \text{和} \quad \hat{a}_{23}\hat{a}_{32} < 1.$$

因此引理 4.15 是 [69, 定理 2.1] 的直接结果. \square

下面的结果用在引理 4.11 的证明中.

引理 4.16 固定任意的 $\hat{c} > 0$. (u, v) 是

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = u(1 - a_{21} - u - a_{23}v), & 0 < x < \hat{c}t, t > t_0, \\ \partial_t v - d_3 \partial_{xx} v = r_3 v(1 - a_{32}u - v), & 0 < x < \hat{c}t, t > t_0, \end{cases}$$

的解. 假设存在某一 $\hat{\mu} > 0$ 使得

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v)(t, \hat{c}t) = (1 - a_{21}, 0)$;
- (ii) 对每一 $\mu \in [0, \hat{\mu}]$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mu t} v(t, \hat{c}t) = 0$.

那么存在 $s_{\hat{c}} > 0$ 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{ct < x < \hat{c}t} v(t, x) = 0, \quad c > s_{\hat{c}},$$

其中

$$s_{\hat{c}} = \begin{cases} c_{\text{LLW}}, & \hat{\mu} \geq \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}), \\ \hat{c} - \frac{2d_3\hat{\mu}}{\hat{c} - \sqrt{\hat{c}^2 - 4d_3[\hat{\mu} + r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21})])}}, & \hat{\mu} < \lambda_{\text{LLW}}(\hat{c} - c_{\text{LLW}}). \end{cases}$$

这里 c_{LLW} 是定义 4.3 里定义的和 $\lambda_{\text{LLW}} = \frac{c_{\text{LLW}} - \sqrt{(c_{\text{LLW}})^2 - \alpha_3^2(1 - a_{32}(1 - a_{21}))}}{2d_3}$.

引理 4.16 的证明可以在第二章的引理 2.2 中找到, 因此省略.

注记 4.15 我们上面提到的 λ_{LLW} 满足

$$\lambda_{\text{LLW}} c_{\text{LLW}} = d_3 \lambda_{\text{LLW}}^2 + r_3(1 - a_{32}(1 - a_{21})) \quad \text{和} \quad \lambda_{\text{LLW}} \leq \frac{c_{\text{LLW}}}{2d_3}.$$

下面的结果与条件 (4.11) 相关和被用于命题 4.3 和 4.5 的证明.

命题 4.8 假设 $(u_i)_{i=1}^3$ 是 (1.3) 的解使得 $(H_{c_1, c_2, \lambda})$ 成立. 如果 (4.11) 成立, 那么对每一小的 $\eta > 0$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{(c_2 - \eta)t < x < (c_2 + \eta)t} (a_{31}u_1(t, x) + a_{32}u_2(t, x)) \geq \min\{a_{31}, a_{32}\}. \quad (4.115)$$

证明. 记 $v(t, x) = a_{31}u_1(t, x) + a_{32}u_2(t, x)$ 和

$$\kappa := \max \left\{ 1, \frac{a_{32}a_{21}}{a_{31}} \right\} \quad \text{和} \quad \ell := \max \left\{ a_{13}a_{31}, \frac{a_{23}a_{32}}{\kappa} \right\}.$$

由于 $a_{31} \leq \frac{a_{32}}{a_{12}}$ 和 $a_{21} < 1 < a_{12}$, 有 $\kappa a_{31} \leq a_{32}$. 由于 $d_1 = 1$, 利用 (1.3), 计算

$$\begin{aligned} \partial_t v - \partial_{xx} v &= a_{31}r_1u_1(1 - u_1 - a_{12}u_2 - a_{13}u_3) + a_{32}u_2(1 - a_{21}u_1 - u_2 - a_{23}u_3) \\ &= a_{31}r_1u_1(1 - u_1) + a_{32}u_2(1 - u_2) - (a_{31}a_{12}r_1 + a_{32}a_{21})u_1u_2 \\ &\quad - (a_{13}a_{31}r_1u_1 + a_{23}a_{32}u_2)u_3 \\ &\geq a_{31}r_1u_1(1 - u_1) + \kappa a_{31}u_2 - \kappa a_{32}u_2^2 - (a_{32}r_1 + \kappa a_{31})u_1u_2 - (r_1u_1 + \kappa u_2)\ell u_3 \\ &= (r_1u_1 + \kappa u_2)(a_{31} - \ell u_3 - v). \end{aligned} \quad (4.116)$$

利用 (4.7), 对每一小的 $\eta > 0$, 我们得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, (c_1 - 3\eta)t) = a_{31} \quad \text{和} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t, (c_2 - 3\eta)t) = a_{32} > a_{31},$$

而且,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_2 - 2\eta)t < x < (\sigma_1 - 2\eta)t} |u_3(t, x)| = 0.$$

应用如定理 B 的证明中的步骤 1 的相似的论证, 可证明存在某一 $T > 0$ 和 $\delta \in (0, a_{31})$ 使得

$$v(t, x) \geq \delta, \quad \Omega_T := \{(t, x) : t \geq T, (c_2 - 3\eta)t \leq x \leq (\sigma_1 - 3\eta)t\}. \quad (4.117)$$

$\underline{v}(t, x)$ 是

$$\partial_t \underline{v} - \partial_{xx} \underline{v} = (r_1 u_1 + \kappa u_2)(a_{31} - \ell u_3 - \underline{v}), \quad \Omega_T \quad \text{和} \quad \underline{v} = \delta, \quad \partial \Omega_T,$$

的唯一解, 其中 $v(t, x)$ 明显是 (4.116) 和 (4.117) 的上解. 通过比较原理, 我们得到在 $\bar{\Omega}_T$ 有 $\underline{v} \leq v$, 注意 $a_{31} \leq a_{32}$, 它足以证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(c_2 - \eta)t < x < (c_2 + \eta)t} \underline{v}(t, x) = a_{31}. \quad (4.118)$$

抛物最大值原理表明在 $\bar{\Omega}_T$ 有 $\underline{v} \leq a_{31}$. 假设 (4.118) 不成立, 那么存在 (t_n, x_n) 使得

$$c_n := x_n/t_n \rightarrow c \in (c_2 - 2\eta, c_2 + 2\eta) \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{v}(t_n, x_n) < a_{31}. \quad (4.119)$$

记 $\underline{v}_n(t, x) := \underline{v}(t_n + t, x_n + x)$ 和 $(u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})(t, x) := (u_1, u_2, u_3)(t_n + t, x_n + x)$. 通过抛物估计可知 \underline{v}_n 和 $(u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$ 对每一紧子集 $K \subset \mathbb{R}^2$ 在 $C_{\text{loc}}^2(K)$ 是预紧的. 注意到当 $n \rightarrow \infty$ 有 $u_{3,n} \rightarrow 0$ 和应用 (4.117), 对某一 $\tilde{\delta} > 0$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (r_1 u_{1,n} + \kappa u_{2,n}) \geq \min \left\{ \frac{r_1}{a_{31}}, \frac{\kappa}{a_{32}} \right\} \liminf_{n \rightarrow \infty} v(t_n + t, x_n + x) > \tilde{\delta}.$$

如需必要取子序列, 假设在 $C_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ 有 $\underline{v}_n \rightarrow \hat{v}$, 它满足

$$\delta \leq \hat{v} \leq a_{31} \quad \text{和} \quad \partial_t \hat{v} - \partial_{xx} \hat{v} \geq \tilde{\delta}(a_{31} - \hat{v}), \quad \mathbb{R}^2.$$

通过抛物最大值原理, 我们推出 \mathbb{R}^2 有 $\hat{v} \equiv a_{31}$, 且特别地, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{v}(t_n, x_n) = \hat{v}(0, 0) = a_{31}$, 这与 (4.119) 矛盾. 因此, (4.118) 成立. \square

注记 4.16 提到在定理 A 的条件 (4.11) 对保证 (4.115) 是几乎必要的. 实际上, 对于 (4.1) 的行波解 $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, [19] 考虑了 $a_{31}\tilde{u}_1 + a_{32}\tilde{u}_2$ 的下界. 在 [19, 定理 1.2] 里令 $\tilde{u}_1 = 1$ 和 $\tilde{u}_2 = \frac{1}{a_{12}}$ 有

$$a_{31}\tilde{u}_1 + a_{32}\tilde{u}_2 \geq \min \left\{ a_{31}, \frac{a_{32}}{a_{12}} \right\} \frac{\min(d_1, 1)}{\max(d_1, 1)}.$$

确认 $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ 满足 (4.115), 要求

$$\min \left\{ a_{31}, \frac{a_{32}}{a_{12}} \right\} \frac{\min(d_1, 1)}{\max(d_1, 1)} \geq \min\{a_{31}, a_{32}\},$$

这反过来表明 $d_1 = 1$ 和 $a_{31} \leq \frac{a_{32}}{a_{12}}$.

4.7 引理 4.3 和命题 4.2 的证明

引理 4.3 的证明. 这里仅证明唯一性, 因为 $\hat{\rho}$ 的存在性是标准的, 如 [26, 定理 2]. 通过区分情况 $\hat{\lambda} \in (0, \infty)$ 和 $\hat{\lambda} = \infty$, 我们将证明分为两个步骤.

步骤 1. 在这部分, 证明当 $\hat{\lambda} \in (0, \infty)$ 有引理 4.3. 对这种情况的唯一性已在引理 4.2 证明. 仍需证明 (a) 和 (b) 成立.

为此, 首先如下定义 $\rho_1 \in C(0, \infty)$:

(i) 如果 $\hat{\lambda} \leq \sqrt{\frac{\hat{r}}{d}}$, 那么 $\rho_1(s) := \max \left\{ \hat{\lambda}s - (d\hat{\lambda}^2 + \hat{r}), 0 \right\}$;

(ii) 如果 $\hat{\lambda} > \sqrt{\frac{\hat{r}}{d}}$, 那么

$$\rho_1(s) := \begin{cases} \hat{\lambda}s - (d\hat{\lambda}^2 + \hat{r}), & s \geq 2d\hat{\lambda}, \\ \frac{s^2}{4d} - \hat{r}, & 2\sqrt{d\hat{r}} \leq s < 2d\hat{\lambda}, \\ 0, & 0 \leq s < 2\sqrt{d\hat{r}}. \end{cases}$$

直接验证 ρ_1 是

$$\min\{\rho - s\rho' + d|\rho'|^2 + \hat{r}, \rho\} = 0, \quad (0, \infty),$$

的粘性下解 (实际上是粘性解). 考虑到 $g \geq 0$, 我们得到 ρ_1 是 (4.32) 的粘性下解.

令 $g_{\max} := \max \left\{ \sup_{(0, \infty)} g, \frac{(c_g)^2}{4d} \right\}$. 如下定义 $\bar{\rho}_1 \in C(0, \infty)$:

(i) 如果 $\hat{\lambda} > \frac{c_g}{2\hat{d}}$, 那么

$$\bar{\rho}_1 := \begin{cases} \hat{\lambda}s - (\hat{d}\hat{\lambda}^2 + \hat{r}), & s \geq 2\hat{d}\hat{\lambda}, \\ \frac{s^2}{4\hat{d}} - \hat{r}, & c_g \leq s < 2\hat{d}\hat{\lambda}, \\ \hat{\lambda}_1s - (\hat{d}\hat{\lambda}_1^2 + \hat{r} - g_{\max}), & 0 \leq s < c_g, \end{cases}$$

$$\text{其中 } \hat{\lambda}_1 = \frac{c_g}{2\hat{d}} - \sqrt{\frac{g_{\max}}{\hat{d}}};$$

(ii) 如果 $\hat{\lambda} \leq \frac{c_g}{2\hat{d}}$, 那么

$$\bar{\rho}_1 := \begin{cases} \hat{\lambda}s - (\hat{d}\hat{\lambda}^2 + \hat{r}), & s \geq c_g, \\ \hat{\lambda}_2s - (\hat{d}\hat{\lambda}_2^2 + \hat{r} - g_{\max}), & 0 \leq s < c_g, \end{cases}$$

$$\text{其中 } \hat{\lambda}_2 = \frac{c_g - \sqrt{(c_g - 2\hat{d}\hat{\lambda})^2 + 4\hat{d}g_{\max}}}{2\hat{d}}.$$

我们将验证对情况 (i) 上面定义的 $\bar{\rho}_1$ 是 (4.32) 的粘性上解, 然后可对情况 (ii) 进行类似的验证. 由于 $\text{spt } g \subset [0, c_g]$, 根据 g_{\max} 的定义, 只要验证 $\bar{\rho}_1$ 是

$$\min \left\{ \rho - s\rho' + \hat{d}|\rho'|^2 + \hat{r} - g_{\max}\chi_{\{0 < s < c_g\}}, \rho \right\} = 0, \quad (0, \infty), \quad (4.120)$$

的粘性上解.

由上面 $\bar{\rho}_1$ 的定义, 可知在 $[0, \infty)$ 中 $\bar{\rho}_1$ 是连续的和非负的. 可知每当 $s \neq c_g$ 时 $\bar{\rho}_1$ 是 (4.120) 的经典解 (因此是粘性解). 仍需考虑当 $\bar{\rho}_1 - \phi$ 在 $s = c_g$ 处达到严格的局部最小值时, 其中 $\phi \in C^1(0, \infty)$ 中是任意测验函数.

在这种情况下, 注意到在 $s = c_g$ 上 $(\hat{r} - g_{\max}\chi_{\{0 < s < c_g\}})^* = \hat{r}$, 我们在点 $s = c_g$ 计算

$$\bar{\rho}_1 - c_g\phi' + \hat{d}|\phi'|^2 + \hat{r} = \frac{(c_g)^2}{4\hat{d}} - \hat{r} - c_g\phi' + \hat{d}|\phi'|^2 + \hat{r} = \hat{d} \left(\phi' - \frac{c_g}{2\hat{d}} \right)^2 \geq 0.$$

因此 $\bar{\rho}_1$ 是 (4.120) 的粘性上解, 从而是 (4.32) 的粘性上解.

同时注意到

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho_1(s)}{s} = \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{\hat{\rho}(s)}{s} = \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{\bar{\rho}_1(s)}{s} = \hat{\lambda}.$$

为了应用引理 4.2, 我们验证 $\rho_1(0) \leq \hat{\rho}(0) \leq \bar{\rho}_1(0)$. 当 $\hat{\lambda} > \frac{c_g}{2\hat{d}}$, 计算

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1(0) &= -(\hat{d}\hat{\lambda}_1^2 + \hat{r} - g_{\max}) \\ &\geq \hat{\lambda}_1(c_g - \hat{d}\hat{\lambda}_1) - (\hat{r} - g_{\max}) \\ &= \hat{d} \left(\frac{c_g}{2\hat{d}} - \sqrt{\frac{g_{\max}}{\hat{d}}} \right) \left(\frac{c_g}{2\hat{d}} + \sqrt{\frac{g_{\max}}{\hat{d}}} \right) - (\hat{r} - g_{\max}) \\ &= \frac{(c_g)^2}{4\hat{d}} - \hat{r} \geq 0 = \hat{\rho}(0) = \rho_1(0), \end{aligned} \quad (4.121)$$

其中第一个不等式由于 $\hat{\lambda}_1 \leq 0$, 对 $\hat{\lambda} \leq \frac{c_g}{2\hat{d}}$ 我们进行类似的验证.

因此, 上面定义的 $\bar{\rho}_1$ 和 ρ_1 是 (4.32) 的一对粘性上下解. 由 ρ_1 和 $\bar{\rho}_1$ 的表达式注意到在 $[c_g, \infty)$ 上有 $\bar{\rho}_1 = \rho_1$ 和满足 (a) 和 (b). $\hat{\rho}$ 是 (4.32) 的粘性解. 由引理 4.2 可知在 $[0, \infty)$ 上 $\rho_1 \leq \hat{\rho} \leq \bar{\rho}_1$, 在 $[c_g, \infty)$ 上 (a) 和 (b) 成立. 因此步骤 1 完成.

步骤 2. 当 $\hat{\lambda} = \infty$ 时, 证明引理 4.3. 首先, 证明当 $\hat{\lambda} = \infty$ 对 (4.32) 的任何粘性解 $\hat{\rho}$, 有

$$\hat{\rho}(s) = \frac{s^2}{4\hat{d}} - \hat{r}, \quad s \geq c_g. \quad (4.122)$$

为此, 我们采用步骤 1 相同的方法通过构造合适的 (4.32) 粘性上下解. 对任意 $\lambda > \sqrt{\hat{r}/\hat{d}}$, 定义 $\rho_\lambda \in C(0, \infty)$ 如下

$$\rho_\lambda := \begin{cases} \lambda s - (\hat{d}\lambda^2 + \hat{r}), & s \geq 2\hat{d}\lambda, \\ \frac{s^2}{4\hat{d}} - \hat{r}, & 2\sqrt{\hat{d}\hat{r}} \leq s < 2\hat{d}\lambda, \\ 0, & 0 \leq s < 2\sqrt{\hat{d}\hat{r}}, \end{cases} \quad (4.123)$$

其可直接验证为 (4.32) 的粘性下解. 考虑到 $\rho_\lambda(0) = 0 = \hat{\rho}(0)$ 和 $\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho_\lambda(s)}{s} = \lambda < \infty = \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{\hat{\rho}(s)}{s}$, 应用引理 4.2 取 $c_b = \infty$ 我们推出对 $\lambda > \sqrt{\hat{r}/\hat{d}}$ 有

$$\rho_\lambda \leq \hat{\rho}, \quad [0, \infty),$$

这里让 $\lambda \rightarrow \infty$, 结合 (4.123) 里 ρ_λ 的表达式, 我们得到

$$\hat{\rho}(s) \geq \frac{s^2}{4\hat{d}} - \hat{r}, \quad s \geq c_g. \quad (4.124)$$

进一步, 对于任何 $\epsilon > 0$ 和 $s_0 > c_g$, 定义 $\bar{\rho}_{\epsilon, s_0} \in C([0, s_0])$ 如下

$$\bar{\rho}_{\epsilon, s_0} := \begin{cases} \frac{s^2}{4d} - \hat{r} + \frac{\epsilon}{s_0 - s}, & c_g \leq s < s_0, \\ \hat{\lambda}_1 s - (d\hat{\lambda}_1^2 + \hat{r} - g_{\max} - \frac{\epsilon}{s_0 - c_g}), & 0 \leq s < c_g, \end{cases} \quad (4.125)$$

其中 $\hat{\lambda}_1 = \frac{c_g}{2d} - \sqrt{\frac{g_{\max}}{d}}$ 是定义在步骤 1. 类似于步骤 1, 验证对每一 $s_0 > c_g$ 在 $(0, s_0)$ 上 $\bar{\rho}_{\epsilon, s_0}$ 是 (4.32) 的粘性上解. 由 (4.121), 可验证 $\bar{\rho}_{\epsilon, s_0}(0) \geq 0 = \hat{\rho}(0) = 0$. 此外, 因为

$$\frac{\hat{\rho}(s_0)}{s_0} < \infty = \liminf_{s \rightarrow s_0} \frac{\bar{\rho}_{\epsilon, s_0}(s)}{s},$$

应用引理 4.2 取 $c_b = s_0$ 我们得到对 $s \in [0, s_0]$ 有 $\hat{\rho}(s) \leq \bar{\rho}_{\epsilon, s_0}(s)$. 让 $\epsilon \rightarrow 0$ 然后 $s_0 \rightarrow \infty$, 对 $s \in [c_g, \infty)$ 有 $\hat{\rho}(s) \leq \frac{s^2}{4d} - \hat{r}$, 其结合 (4.124) 表明 (4.122).

最后, 应用引理 4.2 证明 $\hat{\rho}$ 在 $[0, c_g]$ 也是唯一确定的. 因此 $\hat{\rho}$ 是唯一的, 至此完成了引理 4.2. \square

接下来, 证明命题 4.2 中剩下的情形 $\hat{\lambda} = \infty$.

对命题 4.2 的 $\hat{\lambda} = \infty$ 情形的证明. 在这种情况下, $\tilde{w}(t, x)$ 是下面方程

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + \hat{d}|\partial_x w|^2 + \hat{r} - g\left(\frac{x}{t}\right), w\} = 0, & (0, \infty) \times (0, \infty), \\ w(0, x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \infty, & x \in (0, \infty), \end{cases} & w(t, 0) = 0, \quad [0, \infty). \end{cases} \quad (4.126)$$

的粘性上解 (粘性下解). 如果 $(t, x) \rightarrow (0, x_0)$ 对 $x_0 > 0$ 初值可以理解为 $\tilde{w}(t, x) \rightarrow \infty$

步骤 1. $\tilde{w}(t, x)$ 是 (4.126) 的粘性上解. 证明在 $(0, \infty) \times (0, \infty)$ 有 $\tilde{w}(t, x) \geq t\hat{\rho}\left(\frac{x}{t}\right)$, 其中 $\hat{\rho}$ 是 (4.32) 的唯一的粘性解.

首先证明对 $x \geq c_g t$ 有 $\tilde{w}(t, x) \geq t\hat{\rho}\left(\frac{x}{t}\right)$, 其中 c_g 是给定在 (H_g) . 由引理 4.3 证明中的步骤 2, 对所有的 $\lambda > \sqrt{\hat{r}/\hat{d}}$, 有由 (4.123) 定义的 $\underline{\rho}_\lambda$ 是

$$\min\{\rho - s\rho' + \hat{d}|\rho'|^2 + \hat{r} - g(s), \rho\} = 0, \quad (0, \infty),$$

的粘性下解, 因此, 通过引理 4.2 的标准验证, 推出 $t\underline{\rho}_\lambda\left(\frac{x}{t}\right)$ 是 (4.126) 的粘性下解. 注意到

$$t\underline{\rho}_\lambda(0) = 0 \leq \tilde{w}(t, 0) \quad \text{和} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left[t\underline{\rho}_\lambda\left(\frac{x}{t}\right) \right] = \lambda x \leq \tilde{w}(0, x).$$

应用第三章的定理 3.5 推出对所有 $\lambda > \sqrt{\hat{r}/\hat{d}}$, 有

$$\tilde{w}(t, x) \geq t\rho_\lambda\left(\frac{x}{t}\right), \quad (0, \infty) \times (0, \infty). \quad (4.127)$$

应用引理 4.3, 推出对 $s \in [c_g, \infty)$ 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时有 $\rho_\lambda(s) \rightarrow \frac{s^2}{4\hat{d}} - \hat{r} = \hat{\rho}(s)$, 所以让 (4.127) 里的 $\lambda \rightarrow \infty$ 得到对 $x \geq c_g t$ 有 $\tilde{w}(t, x) \geq t\hat{\rho}\left(\frac{x}{t}\right)$.

为了完成步骤 1, 仍需证明对 $0 \leq x \leq c_g t$ 有 $\tilde{w}(t, x) \geq t\hat{\rho}\left(\frac{x}{t}\right)$. 我们注意到 \tilde{w} 是问题

$$\begin{cases} \min\{\partial_t w + \hat{d}|\partial_x w|^2 + \hat{r} - g(x/t), w\} = 0, & 0 < x < c_g t, \\ w(t, 0) = 0, \quad w(t, c_g t) = t\hat{\rho}(c_g), & t \geq 0, \end{cases} \quad (4.128)$$

的粘性上解, 同时, 通过直接验证, $t\hat{\rho}\left(\frac{x}{t}\right)$ 是 (4.128) 的粘性解. 再次应用第三章的定理 3.5 我们推出对 $0 \leq x \leq c_g t$ 有 $\tilde{w}(t, x) \geq t\hat{\rho}\left(\frac{x}{t}\right)$, 这完成步骤 1.

步骤 2. $\tilde{w}(t, x)$ 是 (4.126) 的粘性下解. 证明 $\tilde{w}(t, x) \leq t\hat{\rho}\left(\frac{x}{t}\right)$. 对任意的 $\epsilon > 0$ 和 $s_0 > c_g$, 可知由 (4.125) 给定的 $\bar{\rho}_{\epsilon, s_0}$ 是

$$\min\{\rho - s\rho' + \hat{d}|\rho'|^2 + \hat{r} - g(s), \rho\} = 0, \quad (0, s_0),$$

的粘性上解, 由此可验证 $t\bar{\rho}_{\epsilon, s_0}\left(\frac{x}{t}\right)$ 对 $0 < x < s_0 t$ 是 (4.126) 的粘性上解. 再次应用第三章的定理 3.5, 推出

$$\tilde{w}(t, x) \leq t\bar{\rho}_{\epsilon, s_0}\left(\frac{x}{t}\right), \quad 0 < x < s_0 t. \quad (4.129)$$

让 $\epsilon \rightarrow 0$ 再让 (4.129) 里的 $s_0 \rightarrow \infty$ (正如在引理 4.3 里的证明), 且注意到对 $s \in [c_g, \infty)$ 有 $\bar{\rho}_{\epsilon, s_0}(s) \rightarrow \frac{s^2}{4\hat{d}} - \hat{r} = \hat{\rho}(s)$, 我们推出对 $x \geq c_g t$ 有 $\tilde{w}(t, x) \leq t\hat{\rho}\left(\frac{x}{t}\right)$. 最后, 对 $0 \leq x \leq c_g t$ 事实 $\tilde{w}(t, x) \leq t\hat{\rho}\left(\frac{x}{t}\right)$ 能如步骤 1 一样通过相同的论证得到. 步骤 2 完成, 因此命题 4.2 完成了. \square

4.8 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 的显式表达式

这节致力于得到 4.2 里的 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 的表达式和证明定理 C.

可知 ρ_{nlp} 是 (4.8) 的唯一粘性解且有 $s_{\text{nlp}} = \sup\{s \geq 0 : \rho_{\text{nlp}}(s) = 0\}$.

由引理 4.3 (其中 $c_g = c_1$), 可显式地重写 ρ_{nlp} 表示为

$$\rho_{\text{nlp}}(c_1) = \zeta_1 c_1 - d_3 \zeta_1^2 - r_3(1 - a_{31}), \quad (4.130)$$

其中 $\alpha_3 = 2\sqrt{d_3 r_3}$ 和 ζ_1 定义在 (4.17) 中.

用这种方法, 可认为 ρ_{nlp} 是

$$\begin{cases} \min\{\rho - s\rho' + d_3|\rho'|^2 + \mathcal{R}(s), \rho\} = 0, & (0, c_1), \\ \rho(0) = 0, \quad \rho(c_1) = \zeta_1 c_1 - d_3 \zeta_1^2 - r_3(1 - a_{31}), \end{cases} \quad (4.131)$$

的唯一粘性解, 其中 $\mathcal{R}(s) = r_3(1 - a_{31}\chi_{\{c_2 < s \leq c_1\}} - a_{32}\chi_{\{s \leq c_2\}})$.

为了证明定理 C, 首先介绍 $s_{\text{nlp}} > \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}$ 的一些充分必要条件. 回顾在 (4.17) 里 ζ_1 的定义.

命题 4.9 如果 $\zeta_1 \leq \frac{c_2}{2d_3}$, 那么 $s_{\text{nlp}} > \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}$ 当且仅当

$$\zeta_1 c_2 - d_3 \zeta_1^2 - r_3(1 - a_{31}) < c_2 \sqrt{\frac{r_3(1 - a_{32})}{d_3}} - 2r_3(1 - a_{32}). \quad (4.132)$$

在这种情况下, (4.131) 的唯一粘性解 ρ_{nlp} 由

$$\rho_{\text{nlp}} = \begin{cases} \zeta_1 s - d_3 \zeta_1^2 - r_3(1 - a_{31}), & c_2 < s \leq c_1, \\ \lambda_{\text{nlp}2}(s - s_{\text{nlp}}), & s_{\text{nlp}} < s \leq c_2, \\ 0, & 0 \leq s \leq s_{\text{nlp}}, \end{cases} \quad (4.133)$$

给定, 其中 $\lambda_{\text{nlp}2} = \frac{c_2 - \sqrt{(c_2 - 2d_3\zeta_1)^2 + \alpha_3^2(a_{32} - a_{31})}}{2d_3}$ 和 $s_{\text{nlp}} = d_3\lambda_{\text{nlp}2} + \frac{r_3(1 - a_{32})}{\lambda_{\text{nlp}2}}$.

注记 4.17 假设 (4.132) 成立. 直接验证 $\zeta_1 c_2 - d_3 \zeta_1^2 - r_3(1 - a_{31}) < \frac{c_2^2}{4d_3} - r_3(1 - a_{32})$, 这表明

$$(c_2 - 2d_3\zeta_1)^2 + \alpha_3^2(a_{32} - a_{31}) > 0, \quad (4.134)$$

所以 $\lambda_{\text{nlp}2}$ 是好的定义.

通过直接计算, 可验证 (4.132) 等价于 (4.134) 和 $\lambda_{\text{nlp}2} < \sqrt{\frac{r_3(1 - a_{32})}{d_3}}$, 由此 $s_{\text{nlp}} > \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}$.

命题 4.9 的证明. 我们将证明分成下面两步.

步骤 1. 假设 (4.132) 成立和证明 $s_{\text{nlp}} > \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}$.

用 $\hat{\rho}$ 表示 (4.133) 右端项. 证明 $\hat{\rho}$ 是 (4.131) 的粘性解.

通过构造, $\hat{\rho}$ 在 $[0, c_1]$ 上是连续的. 实际上, 当 $s \notin \{c_2, s_{\text{nlp}}\}$ 时 $\hat{\rho}$ 是 (4.131) 经典的解. 称 $\hat{\rho}$ 是 (4.131) 的粘性上解. 为此, 假设 $\hat{\rho} - \phi$ 在 $s_0 \in \{c_2, s_{\text{nlp}}\}$ 上达到严格局部最小值. 如果 $s_0 = s_{\text{nlp}}$, 那么 $0 \leq \phi'(s_{\text{nlp}}) \leq \lambda_{\text{nlp}2}$, 并因此在 $s = s_{\text{nlp}}$ 上有

$$\hat{\rho}(s_{\text{nlp}}) - s_{\text{nlp}}\phi' + d_3|\phi'|^2 + \mathcal{R}^*(c_2) \geq d_3(\phi' - \lambda_{\text{nlp}2}) \left(\phi' - \frac{r_3(1-a_{32})}{d_3\lambda_{\text{nlp}2}} \right) \geq 0,$$

其中应用 $\hat{\rho}(s_{\text{nlp}}) = 0$ 得到第一个不等式和最后一个不等式是 $\phi' - \frac{r_3(1-a_{32})}{d_3\lambda_{\text{nlp}2}} \leq \phi' - \lambda_{\text{nlp}2} \leq 0$ (由注记 4.17 可得) 的结果.

在 $s_0 = c_2$ 情形, 有 $\phi'(c_2) \leq \zeta_1$, 所以在 $s = c_2$ 上计算,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(c_2) - c_2\phi'(c_2) + d_3|\phi'(c_2)|^2 + \mathcal{R}^*(c_2) &\geq \zeta_1 c_2 - d_3\zeta_1^2 - c_2\phi'(c_2) + d_3|\phi'(c_2)|^2 \\ &= d_3 \left(\phi'(c_2) + \zeta_1 - \frac{c_2}{d_3} \right) (\phi'(c_2) - \zeta_1) \geq 0, \end{aligned}$$

其中应用 $\phi'(c_2) \leq \zeta_1$ 和 $\phi'(c_2) + \eta_1 - \frac{c_2}{d_3} \leq 2\zeta_1 - \frac{c_2}{d_3} \leq 0$ 得到最后一个不等式.

仍需证明 $\hat{\rho}$ 也是 (4.131) 的粘性下解. 对某一试验函数 $\phi \in C^1(0, \infty)$, 假设 $\hat{\rho} - \phi$ 在 $s = c_2$ 上达到严格的局部最大值, 且 $\hat{\rho}(c_2) > 0$.

注意到对 $s \approx c_2$ 有 $(\hat{\rho} - \phi)(s) \leq (\hat{\rho} - \phi)(c_2)$, 所以 $\zeta_1 \leq \phi'(c_2) \leq \lambda_{\text{nlp}2}$. 因此, 在 $s = c_2$ 估计, 通过 (4.133) 计算可得

$$\begin{aligned} \hat{\rho} - c_2\phi' + d_3|\phi'|^2 + \mathcal{R}_*(c_2) &= \hat{\rho} - c_2\phi' + d_3|\phi'|^2 + r_3(1 - \max\{a_{31}, a_{32}\}) \\ &\leq \zeta_1 c_2 - d_3\zeta_1^2 - c_2\phi' + d_3|\phi'|^2 \\ &= d_3 \left(\phi' + \zeta_1 - \frac{c_2}{d_3} \right) (\phi' - \zeta_1) \leq 0, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式由 $\zeta_1 \leq \phi'(c_2) \leq \lambda_{\text{nlp}2} \leq \frac{c_2}{2d_3}$ 可得. 因此, 由 (4.133) 右端定义的 $\hat{\rho}$ 是 (4.131) 的粘性解. 因为 $\rho_{\text{nlp}}(c_1) = \hat{\rho}(c_1) = 0$ 和 $\rho_{\text{nlp}}(0) = \hat{\rho}(0)$, 的粘性解的唯一性 (由引理 4.3), 推出对 $[0, c_1]$ 有 $\rho_{\text{nlp}}(s) = \hat{\rho}(s)$.

由注记 4.17 我们推出 $s_{\text{nlp}} > \alpha_3\sqrt{1-a_{32}}$. 步骤 1 完成.

步骤 2. 假设 (4.132) 不成立并证明 $s_{\text{nlp}} \leq \alpha_3\sqrt{1-a_{32}}$.

假设 (4.132) 不成立, 即

$$\zeta_1 c_2 - d_3\zeta_1^2 - r_3(1-a_{31}) \geq c_2 \sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}} - 2r_3(1-a_{32}). \quad (4.135)$$

因为 $\zeta_1 \leq \frac{c_2}{2d_3}$, (4.135) 的左端项在 $\left[0, \frac{c_2}{2d_3}\right]$ 上关于 ζ_1 递增, 且 (4.135) 的右端项大于等于 $-r_3(1-a_{32})$ (因为 $c_2 \geq \alpha_3\sqrt{1-a_{32}}$), 选择 $0 < \tilde{\zeta}_1 \leq \zeta_1 \leq \frac{c_2}{2d_3}$ 使满足 $\tilde{\zeta}_1 c_2 - d_3 \tilde{\zeta}_1^2 - r_3(1-a_{31}) = c_2 \sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}} - 2r_3(1-a_{32})$.

定义

$$\rho_3(s) := \begin{cases} \tilde{\zeta}_1 s - d_3 \tilde{\zeta}_1^2 - r_3(1-a_{31}), & c_2 < s \leq c_1, \\ s \sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}} - 2r_3(1-a_{32}), & \alpha_3\sqrt{1-a_{32}} < s \leq c_2, \\ 0, & 0 \leq s \leq \alpha_3\sqrt{1-a_{32}}. \end{cases} \quad (4.136)$$

通过 $\tilde{\zeta}_1$ 的选择, 有 $\rho_{\text{nlp}}(c_1) \geq \rho_3(c_1)$.

通过步骤 1 相同的论证, 可验证 ρ_3 是 (4.131) 的粘性下解. 连同 $\rho_{\text{nlp}}(0) = \rho_3(0)$, 通过再次应用引理 4.2, 对 $s \in [0, c_1]$ 我们得到 $\rho_{\text{nlp}}(s) \geq \rho_3(s)$.

因为在 $s > \alpha_3\sqrt{1-a_{32}}$ 上有 $\rho_{\text{nlp}}(s) \geq \rho_3(s) > 0$, 我们推出 $s_{\text{nlp}} \leq \alpha_3\sqrt{1-a_{32}}$. \square

命题 4.10 如果 $\zeta_1 > \frac{c_2}{2d_3}$, 那么 $s_{\text{nlp}} > \alpha_3\sqrt{1-a_{32}}$ 当且仅当

$$\frac{(c_2)^2}{4d_3} - r_3(1-a_{31}) < c_2 \sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}} - 2r_3(1-a_{32}). \quad (4.137)$$

在这种情况下, (4.131) 的粘性解 ρ_{nlp} 由

$$\rho_{\text{nlp}} \begin{cases} \zeta_1 s - d_3 \zeta_1^2 - r_3(1-a_{31}), & 2d_3 \zeta_1 < s \leq c_1, \\ \frac{s^2}{4d_3} - r_3(1-a_{31}), & c_2 < s \leq 2d_3 \zeta_1, \\ \lambda_{\text{nlp}1}(s - s_{\text{nlp}}), & s_{\text{nlp}} < s \leq c_2, \\ 0, & 0 \leq s \leq s_{\text{nlp}}, \end{cases} \quad (4.138)$$

给出, 其中 $\lambda_{\text{nlp}1} = \frac{c_2}{2d_3} - \sqrt{\frac{r_3(a_{32}-a_{31})}{d_3}}$ 和 $s_{\text{nlp}} = d_3 \lambda_{\text{nlp}1} + \frac{r_3(1-a_{32})}{\lambda_{\text{nlp}1}}$.

注记 4.18 条件 (4.137) 等价于

$$a_{32} > a_{31} \text{ 和 } \lambda_{\text{nlp}1} < \sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}}, \quad (4.139)$$

这表明 $\lambda_{\text{nlp}1}$ 是好的定义且 $s_{\text{nlp}} = d_3 \lambda_{\text{nlp}1} + \frac{r_3(1-a_{32})}{\lambda_{\text{nlp}1}} > \alpha_3\sqrt{1-a_{32}}$.

命题 4.10 的证明. 若 (4.137) 成立, 正如命题 4.9 里步骤 1 的相同论证, 可验证由 (4.138) 给定的 ρ_{nlp} 是 (4.131) 的唯一的粘性解. 那么由注记 4.18 可得 $s_{\text{nlp}} > \alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}}$.

仍需假设 (4.137) 不成立时证明 $s_{\text{nlp}} \leq \alpha_3 \sqrt{1 - a_{32}}$. 在这种情形下, $\frac{c_2^2}{4d_3} - r_3(1 - a_{31}) \geq c_2 \sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}} - 2r_3(1 - a_{32})$.

因为 $\zeta \mapsto c_2\zeta - d_3\zeta^2$ 在 $\zeta = \frac{c_2}{2d_3}$ 上达到最大值 $\frac{c_2^2}{4d_3}$, 选择 $\tilde{\zeta}_1 \geq \frac{c_2}{2d_3}$ 使之满足 $c_2\tilde{\zeta}_1 - d_3\tilde{\zeta}_1^2 - r_3(1 - a_{31}) = c_2 \sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}} - 2r_3(1 - a_{32})$.

现在, 如下定义 $\rho_4 \in C([0, c_1])$.

(i) 如果 $\tilde{\zeta}_1 \leq \zeta_1$, 那么

$$\rho_4(s) := \begin{cases} \zeta_1 s - d_3\zeta_1^2 - r_3(1 - a_{31}), & 2d_3\zeta_1 < s \leq c_1, \\ \frac{s^2}{4d_3} - r_3(1 - a_{31}), & 2d_3\tilde{\zeta}_1 < s \leq 2d_3\zeta_1, \\ \tilde{\zeta}_1 s - d_3\tilde{\zeta}_1^2 - r_3(1 - a_{31}), & c_2 < s \leq 2d_3\tilde{\zeta}_1, \\ s\sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}} - 2r_3(1 - a_{32}), & \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}} < s \leq c_2, \\ 0, & 0 \leq s \leq \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}; \end{cases}$$

(ii) 如果 $\tilde{\zeta}_1 > \zeta_1$, 那么

$$\rho_4(s) := \begin{cases} \zeta_1 s - d_3\zeta_1^2 - r_3(1 - a_{31}), & \min\{d_3(\zeta_1 + \tilde{\zeta}_1), c_1\} < s \leq c_1, \\ \tilde{\zeta}_1 s - d_3\tilde{\zeta}_1^2 - r_3(1 - a_{31}), & c_2 < s \leq \min\{d_3(\zeta_1 + \tilde{\zeta}_1), c_1\}, \\ s\sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}} - 2r_3(1 - a_{32}), & \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}} < s \leq c_2, \\ 0, & 0 \leq s \leq \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}. \end{cases}$$

证明上面定义的 ρ_4 是 (4.131) 的粘性下解.

实际上, 在情形 (i) 下当 $s \notin \{c_2, \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}\}$ 时或者在情形 (ii) 下 $s \notin \{d_3(\zeta_1 + \tilde{\zeta}_1), c_2, \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}\}$ 时可知 ρ_4 是 (4.131) 的经典解.

对这两种情形, 在 $s = c_2$ 的小邻域里, $\rho_4(s)$ 能重写为

$$\rho_4(s) = \max \left\{ \tilde{\zeta}_1 s - d_3\tilde{\zeta}_1^2 - r_3(1 - a_{31}), s\sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}} - 2r_3(1 - a_{32}) \right\}.$$

注意到 $\tilde{\zeta}_1 s - d_3 \tilde{\zeta}_1^2 - r_3(1 - a_{31})$ 和 $s\sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}} - 2r_3(1 - a_{32})$ 都是 (4.131) 的粘性下解. 因此在这个区域 $\underline{\rho}_4$ 是 (4.131) 的粘性下解.

仍需考虑情形 (ii) 和假设对任意试验函数 $\phi \in C^1(0, \infty)$, $\underline{\rho}_4 - \phi$ 在 $\hat{s} = d_3(\zeta_1 + \tilde{\zeta}_1)$ 达到严格局部的最大值, 且 $\rho(\hat{s}) > 0$.

在这种情形下, 可验证 $\zeta_1 \leq \phi'(\hat{s}) \leq \tilde{\zeta}_1$, 由此, 在 $\hat{s} = d_3(\zeta_1 + \tilde{\zeta}_1)$ 上, 我们推出

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_4(\hat{s}) - c_2\phi' + d_3|\phi'|^2 + \mathcal{R}_*(\hat{s}) &= \underline{\rho}_4(\hat{s}) - \hat{s}\phi' + d_3|\phi'|^2 + r_3(1 - a_{31}) \\ &= \zeta_1 c_2 - d_3 \zeta_1^2 - d_3(\zeta_1 + \tilde{\zeta}_1)\phi' + d_3|\phi'|^2 \\ &\leq d_3(\phi' - \zeta_1)(\phi' - \tilde{\zeta}_1) \leq 0, \end{aligned}$$

其中应用 $\zeta_1, \tilde{\zeta}_1 \geq \frac{c_2}{2d_3}$ 得到第一个不等式. 因此, $\underline{\rho}_4$ 是 (4.131) 粘性下解.

由 $\rho_{\text{nlp}}(c_1) = \underline{\rho}_4(c_1)$ 和 $\rho_{\text{nlp}}(0) = \underline{\rho}_4(0)$, 引理 4.2 表明对 $s \in [0, c_1]$ 有 $\rho_{\text{nlp}}(s) \geq \underline{\rho}_4(s)$.

因为对 $s > \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}$ 有 $\rho_{\text{nlp}}(s) \geq \underline{\rho}_4(s) > 0$, 有 $s_{\text{nlp}} \leq \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}$. \square

现可以证明定理 C.

定理 C 的证明. 由命题 4.7, 4.9, 和 4.10, 可知 $s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda)$ 能表示为

$$s_{\text{nlp}}(c_1, c_2, \lambda) = \begin{cases} d_3\lambda_{\text{nlp}1} + \frac{r_3(1-a_{32})}{\lambda_{\text{nlp}1}}, & \zeta_1 > \frac{c_2}{2d_3} \text{ 和 (4.137) 成立,} \\ d_3\lambda_{\text{nlp}2} + \frac{r_3(1-a_{32})}{\lambda_{\text{nlp}2}}, & \zeta_1 \leq \frac{c_2}{2d_3} \text{ 和 (4.132) 成立,} \\ \alpha_3\sqrt{1 - a_{32}}, & \text{其他.} \end{cases} \quad (4.140)$$

由注记 4.18, 我们注意到 (4.137) 等价于 (4.139), 和由注记 4.17 可知 (4.132) 等价于 (4.134) 和 $\lambda_{\text{nlp}2} < \sqrt{\frac{r_3(1-a_{32})}{d_3}}$.

另一方面, (4.134) 等价于 $a_{31} < a_{32}$, 或者 $a_{31} \geq a_{32}$ 且 $\zeta_1 + \zeta_2 < \frac{c_2}{d_3}$, 其中应用在 (4.17) 上 ζ_2 的定义. 因此, (4.140) 与 (4.16) 一致, 所以得到定理 C 的 (4.16). \square

第五章 论文总结与研究展望

本章主要对全文工作进行总结, 并给出未来研究展望

5.1 论文总结

本文主要针对 Lotka-Volterra 双物种和三物种竞争扩散系统进行分析, 主要研究具有多波物种的渐近传播速度, 并考虑了初值对传播速度的影响. 本文主要用一种新的方法研究多物种反应-扩散系统的传播速度, 本文的主要思想是在特定的移动坐标 $y = x - ct$ 下解的渐近速度估计, 这种方法受到了 Freidlin, Evans 和 Souganidis 等人 Hamilton-Jacobi 方法的启发. 这种方法能够处理许多反应-扩散问题, 如问题的解耦, 和某些非合作系统等.

针对初值为紧支集的双物种弱竞争扩散系统, 第一个主要结果解决了由 Shigesada 等人在 1997 年提出的公开问题, 和证明了其中一个物种以 “nonlocally pulled wave” 向右传播. 结果表明较快物种的传播速度与较慢速度无关, 而较慢物种的传播速度是较快物种的传播速度的非递增函数. 这说明较快的物种抑制较慢物种的入侵, 快的物种速度越快, 慢的物种越难入侵. 特别地, 当两个竞争物种在缺乏竞争的情况下传播速度相同时, 存在 (k_1, k_2) 到 $(0, 0)$ 的入侵波, 与 Tang 和 Fife [92] 的结果相关. 此外, 这个方法可应用于 $a < 1 < b$ 的情形, 这意味着提供了一种更简单的方法研究 [47], 无需构造全局上下解, 且能清楚地知道出现非局部传播速度的原因.

自然地, 研究初值对物种传播速度的影响. 这里主要集中研究当初值为指数衰减的情形. 在这部分得到了分段的 Lipschitz 连续的 Hamilton-Jacobi 方程比较原理, 基于此原理, 构造局部上下解推导出传播速度的准确表达式, 得到初值如何影响物种的传播速度. 结果表明初值的衰减率越快导致传播速度越慢. 当衰减率足够大时, 传播性质结果与初值为紧支集的情形相同. 快的物种关于该物种的指数衰减率为非递增函数, 慢的物种同时依赖于快物种的传播速度和慢物种的指数衰减率.

最后研究三个物种竞争系统的传播性质, 它是非合作的, 比较原理不再适用. 这里应用 Hamilton-Jacobi 和速度递归的方法, 就两个更快的物种的传播速

度而言,建立了最慢物种传播速 c_3 的上下界估计.在一定条件下,此估计是最佳的,即 $c_3 = s_{\text{nlp}}$,其中速度 s_{nlp} 是某一 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解的自由边界点.此外,还给出了物种在最终区域 $\{(t, x) : x < c_3 t\}$ 的渐近性态,且通过数值模拟得到此时给出的假设条件是得到此结果的最优的.文章的最后给出了 s_{nlp} 的显式表达式,且通过数值模拟得到在某些条件下显示 $c_3 < s_{\text{nlp}}$,说明文章得到的结果是较优的,即 $c_3 = s_{\text{nlp}}$ 在一定条件下才成立.据我们所知,这是在无界区域三物种竞争系统的第一个理论结果.

5.2 研究展望

本文主要对双物种和三物种的竞争扩散系统进行分析,利用 Hamilton-Jacobi 方法,得到了物种的渐近传播速度及初值对传播速度的影响,其均为生物数学领域的重要课题,全文虽给出了较为深入的分析,但生物系统不仅有竞争还有捕食和合作系统等,因此仍有很多工作可以开展:

(1) 对于三物种系统,虽然本文对三物种竞争扩散系统的传播系统已有深入研究,但是三物种捕食系统的最慢物种的传播性质仍缺乏理论结果.探讨继续用本文的方法去研究三物种的捕食系统的最慢物种的传播速度,如 Ducrot 等人 [33] 研究了两个捕食者和一个被捕食者的捕食系统,但对于最慢物种的传播速度仍是一个公开问题.

(2) 对于常系数和空间异质的合作系统已有深入分析,对于小扩散系数的时空异质的合作系统, Bai 和 He [7] 得到了主特征值的渐近行为,但是对应的主特征函数仍是一个公开问题,可研究对应的主特征函数的渐近行为以及时间周期和空间异质的作用,继而在理论和应用方面给出指解释和说明.

(3) Hu 等人 [58] 研究了关于从不利环境 (有利环境) 转变为有利环境 (不利环境) 的自由边界问题.我们可利用 Hamilton-Jacobi 方法研究非单调的变换环境下的自由边界问题.

以上几个问题的列举只是为了抛砖引玉.事实上,在反应-扩散方程中,依然存在许多非常重要的并且具有挑战性的问题值得人们进一步地关注和研究.

参考文献

- [1] Y. Achdou, G. Barles, H. Ishii, G.L. Litvinov, Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications, Lecture Notes in Math., Vol.2074, Springer, Heidelberg, 2013.
- [2] A. Alhasanat, C. Ou, On a conjecture raised by Yuzo Hosono, *J. Dynam. Differential Equations* 31 (2019) 287-304.
- [3] A. Alhasanat, C. Ou, Minimal-speed selection of traveling waves to the Lotka-Volterra competition model, *J. Differential Equations* 26 (2019) 7357-7378.
- [4] O. Alvarez, Bounded-from-below viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Differential Integral Equations* 10 (1997) 419-436.
- [5] D.G. Aronson, H.F. Weinberger, Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation, *Partial differential equations and related topics* (ed. J.A. Goldstein; Springer, Berlin, 1975) 5-49.
- [6] D.G. Aronson, H.F. Weinberger, Multidimensional nonlinear diffusion arising in population dynamics, *Adv. Math.* 30 (1978) 33-76.
- [7] X.L. Bai, X.Q. He, Asymptotic behavior of the principal eigenvalue for cooperative periodic-parabolic systems and applications, *J. Differential Equations* 269 (2020) 5931-5958.
- [8] M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta, Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, *System & Control: Foundations & Applications*, Birkäuser: Boston, MA, USA; Basel, Switzerland; Berlin, Germany, 1997.
- [9] G. Barles, L.C. Evans, P.E. Souganidis, Wavefront propagation for reaction-diffusion systems of PDE, *Duke Math. J.* 61 (1990) 835-858.
- [10] G. Barles, B. Perthame, Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, *Model. Math. Anal. Numer.* 21 (1987) 557-579.
- [11] G. Barles, H.M. Soner, P.E. Souganidis, Front propagation and phase field theory, *SIAM J. Control Optim.* 31 (1993) 439-469.

- [12] H. Berestycki, J. Fang, Forced waves of the Fisher-KPP equation in a shifting environment, *J. Differential Equations* 264 (2018) 2157-2183.
- [13] H. Berestycki, F. Hamel, G. Nadin, Asymptotic spreading in heterogeneous diffusive excitable media, *J. Func. Anal.* 255 (2008) 2146-2189.
- [14] H. Berestycki, G. Nadin, Spreading speeds for one-dimensional monostable reaction-diffusion equations, *J. Math. Phys.* 53 (2012) 23pp.
- [15] H. Berestycki, G. Nadin, Asymptotic spreading for general heterogeneous Fisher-KPP type equations, *Mem. Amer. Math. Soc.* in press.
- [16] M.R. Booty, R. Haberman, A.A. Minzoni, The accommodation of traveling waves of Fisher's to the dynamics of the leading tail, *SIAM J. Appl. Math.* 53 (1993) 1009-1025.
- [17] C. Carrère, Spreading speeds for a two-species competition-diffusion system, *J. Differential Equations* 264 (2018) 2133-2156.
- [18] N. Champagnat, P.-E. Jabin, G. Raoul, Convergence to equilibrium in competitive Lotka-Volterra and chemostat systems, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 348 (2010) 1267-1272.
- [19] C.-C. Chen, L.-C. Hung, A maximum principle for diffusive Lotka-Volterra systems of two competing species, *J. Differential Equations* 261 (2016) 4573-4592.
- [20] C.-H. Chang, C.-C. Chen, L.-C. Hung, M. Mimura, T. Ogawa, Existence and stability of non-monotone traveling wave solutions for the diffusive Lotka-Volterra system of three competing species, *Nonlinearity* 33 (2020) 5080-5110.
- [21] G. Chen, S. Wu, Invasion entire solutions for a three species competition-diffusion systems, *Taiwanese J. Math.* 22 (2018) 859-880.
- [22] X. Chen, B. Hu, Viscosity solutions of discontinuous Hamilton-Jacobi equations, *Interfaces Free Bound.* 10 (2008) 339-359.
- [23] X. Chen, J.-C. Tsai, Spreading speed in a farmers and hunter-gatherers model arising from Neolithic transition in Europe, *J. Math. Pures Appl.* in press.
- [24] C.M.H. Clarke, Liberations and dispersal of red deer in northern South Island districts, *NZ J. Forestry Sci.* 1 (1971) 194-207.

-
- [25] M.G. Crandall, P.L. Lions, Viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 277 (1983) 1-42.
- [26] M.G. Crandall, P.L. Lions, On existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Nonlin. Anal. Theory Methods Appl.* 10 (1986) 353-370.
- [27] M.G. Crandall, P.L. Lions, H. Ishii, Uniqueness of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations revisited, *J. Math. Soc. Japan* 39 (1987) 581-596.
- [28] M.B. Davis, Quaternary history and stability of forest communities, In: D.C. West, H. H. Shugart, D. B. Botkin (editors), *Forest Succession: Concepts and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1981, 132-153.
- [29] W.W. Ding, Y.H. Du, X. Liang, Spreading in space - time periodic media governed by a monostable equation with free boundaries, Part 2: Spreading speed, *Ann. I.H. Poincaré-AN* 36 (2019) 1539-1573.
- [30] Y.H. Du, C.-H. Wu, Spreading with two speeds and mass segregation in a diffusive competition system with free boundaries, *Calc. Var. Partial Dif.* 57 (2018) 36pp.
- [31] A. Ducrot, Convergence to generalized transition waves for some Holling-Tanner prey-predator reaction-diffusion system, *J. Math. Pures Appl.* 100 (2013) 1-15.
- [32] A. Ducrot, Spatial propagation for a two component reaction-diffusion system arising in population dynamics, *J. Differential Equations* 260 (2016) 8316-8357.
- [33] A. Ducrot, T. Giletti, J.-S. G, M. Shimoji, Asymptotic spreading speeds for a predator-prey system with two predators and one prey, in press.
- [34] A. Ducrot, T. Giletti, H. Matano, Spreading speeds for multidimensional reaction-diffusion systems of the prey-predator type, *Calc. Var. Partial Dif.* 58 (2019) 137.
- [35] U. Ebert, W.V. Saarloos, Front propagation into unstable states: Universal algebraic convergence towards uniformly translating pulled fronts, *Physica D* 146 (2000) 1-99.
- [36] C.S. Elton, *The ecology of invasion by animals and plants*, Methuen, London.
- [37] L.C. Evans, P.E. Souganidis, Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equation, *Indiana Univ. Math. J.* 33 (1984) 773-797.

- [38] L.C. Evans, P.E. Souganidis, A PDE approach to geometric optics for certain semi-linear parabolic equations, *Indiana Univ. Math. J.* 38 (1989) 141-172.
- [39] J. Fang, Y.J. Lou, J.H. Wu, Can pathogen spread keep pace with its host invasion? *SIAM J. Appl. Math.* 74 (2016) 1633-1657.
- [40] J. Fang, X. Yu, X.Q. Zhao, Traveling waves and spreading speeds for time - space periodic monotone systems, *J. Func. Anal.* 272 (2017) 4222-4262.
- [41] J. Fang, X.Q. Zhao, Traveling waves for monotone semiflows with weak compactness, *SIAM J. Math. Anal.* 46 (2014) 3678-3704.
- [42] R.A. Fisher, The wave of advance of advantageous genes, *Annals of eugenics* 7 (1937) 355-369.
- [43] M.I. Freidlin, Limit theorems for large deviations and reaction-diffusion equation, *Ann. Probab.* 13 (1985) 639-675.
- [44] Y. Giga, P. Górká, P. Rybka, A comparison principle for Hamilton-Jacobi equations with discontinuous Hamiltonians, *Proc. Amer. Math. Soc.* 139 (2011) 1777-1785.
- [45] L. Girardin, Non-cooperative Fisher-KPP systems: Traveling waves and long-time behavior, *Nonlinearity* 31 (2018) 108-164.
- [46] L. Girardin, Non-cooperative Fisher-KPP systems: Asymptotic behavior of traveling waves, *Math. Mod. Meth. Appl. S.* 28 (2018) 1067-1104.
- [47] L. Girardin, K.Y. Lam, Invasion of an empty habitat by two competitors: spreading properties of monostable two-species competition-diffusion systems, *P. Lond. Math. Soc.* 119 (2019) 1279-1335.
- [48] J.-S. Guo, C.-H. Wu, Dynamics for a two-species competition-diffusion model with two free boundaries, *Nonlinearity* 28 (2015) 1-27.
- [49] J.-S. Guo, Y. Wang, C.-H. Wu, C.C. Wu, The minimal speed of traveling wave solutions for a diffusive three species competition system, *Taiwanese J. Math.* 19 (2015) 1805-1829.
- [50] F. Hamel, G. Nadin, Spreading properties and complex dynamics for monostable reaction-diffusion equations, *Comm. Partial Differential Equations* 37 (2012) 511-537.

-
- [51] R. Hengeveld, *Dynamics of Biological Invasions*. Chapman and Hall, London, 1989.
- [52] V.H. Heywood, Patterns, extents and modes of invasions by terrestrial plants. In *Biological Invasions: A Global Perspective*, SCOPE 37 (1989) 31-55.
- [53] M. Holzer, A. Scheel, Accelerated fronts in a two stage invasion process, *SIAM J. Math. Anal.* 46 (2014) 397 - 427.
- [54] F.C. Hoppensteadt, *Mathematical theories of populations: demographics, genetics, and epidemics*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math. 15, SIAM, Philadelphia, 1975.
- [55] X.J. Hou, A.W. Leung, Traveling wave solutions for a competitive reaction-diffusion system and their asymptotics, *Nonlinear Anal-Real* 9 (2008) 2196-2213.
- [56] X. Hou, Y. Li, Traveling waves in a three species competition-cooperation system, *Commun. Pure Appl. Anal.* 16 (2017) 1103-1119.
- [57] S. Hsu, X.Q. Zhao, Spreading speeds and traveling waves for nonmonotone integrodifference equations, *SIAM J. Math. Anal.* 40 (2008) 776-789.
- [58] Y.Y. Hu, X.A. Hao, X.F. Song, Y.H. Du, A free boundary problem for spreading under shifting climate, *J. Differential Equations*, 269 (2020) 5931-5958.
- [59] W.Z. Huang, Problem on minimum wave speed for a Lotka-Volterra reaction-diffusion competition model, *J. Dyn. Differ. Equ.* 22 (2010) 285-297.
- [60] W.Z. Huang, M.A. Han, Non-linear determinacy of minimum wave speed for a Lotka-Volterra competition model, *J. Differential Equations* 251 (2011) 1549-1561.
- [61] M. Iida, R. Lui, H. Ninomiya, Stacked fronts for cooperative systems with equal diffusion coefficients, *SIAM J. Math. Anal.* 43 (2011) 1369-1389.
- [62] H. Ishii, Hamilton-Jacobi equations with discontinuous Hamiltonians on arbitrary open Sets, *Bull. Facul. Sci Eng. Chuo Univ.* 28 (1985) 33-77.
- [63] H. Ishii, Comparison results for hamilton-jacobi equations without growth condition on solutions from above, *Appl. Anal.* 67 (1997) 357-372.
- [64] H. Ishii, A short introduction to viscosity solutions and the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi Equations, *Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications*, 111-247, *Lecture Notes in Math.*, 2074, Fond. CIME/CIME Found. Subser., Springer, Heidelberg, 2013.

- [65] Y. Kametaka, On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov-Petrovski-Piskunov type, *Osaka J. Math.* 13 (1976) 11-66.
- [66] Y. Kan-on, Fisher wave fronts for the Lotka-Volterra competition model with diffusion. *Nonlinear Anal.* 28 (1997) 145-164.
- [67] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky, N.S. Piskunov, Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique, *Bulletin Université d'État à Moscou* 1 (1937) 1-25.
- [68] K.Y. Lam, R. Salako, Q. Wu, Entire Solutions of Diffusive Lotka-Volterra System, *J. Differential Equations* 169 (2020) 10758-10791.
- [69] M.A. Lewis, B.T. Li, H.F. Weinberger, Spreading speed and linear determinacy for two-species competition models, *J. Math. Biol.* 45 (2002) 219-233.
- [70] B.T. Li, Multiple invasion speeds in a two-species integro-difference competition model, *J. Math. Biol.* 76 (2018) 1975-2009.
- [71] B.T. Li, H.F. Weinberger, M.A. Lewis, Spreading speeds as slowest wave speeds for cooperative systems, *Math. Biosci.* 196 (2005) 82-98.
- [72] X. Liang, X.Q. Zhao, Asymptotic speeds of spread and traveling waves for monotone semiflows with applications, *Commun. Pure Appl. Math.* 60 (2007) 1-40.
- [73] G. Lin, W.T. Li, Asymptotic spreading of competition diffusion systems: the role of interspecific competitions, *European J. Appl. Math.* 23 (2012) 669-689.
- [74] G. Lin, Y.B. Niu, S.X. Pan, S.G. Ruan, Spreading speed in and integrodifference predator-prey system without comparison principle, *Bull. Math. Biol.* 82 (2020) 28 pp.
- [75] S.Y. Liu, H.M. Huang, M.X. Wang, Asymptotic spreading of a diffusive competition model with different free boundaries, *J. Differential Equations* 266 (2019) 4769-4799.
- [76] Y. Liu, P. Wang, Asymptotic spreading of a three dimensional Lotka-Volterra cooperative-competitive system, *Discrete Contin. Dyn. Syst. B* 20 (2015) 505-518.
- [77] R. Lui, Biological growth and spread modeled by systems of recursions. I. Mathematical theory, *Math. Biosci.* 93 (1989) 269-295.

- [78] A.J. Majda, P.E. Souganidis, Large-scale front dynamics for turbulent reaction-diffusion equations with separated velocity scales, *Nonlinearity* 7 (1994) 1-30.
- [79] H.P. McKean, Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov, *Commun. Pure Appl. Math.* 28 (1975) 323-331.
- [80] V. Méndez, J. Fort, H.G. Rotstein, S. Fedotov, Speed of reaction-diffusion fronts in spatially heterogeneous media, *Phys. Rev. E* 68 (2003) 041105.
- [81] H.A. Mooney, J.A. Drake, Biological invasions: a SCOPE program, Overview. In *Biological Invasions: A Global Perspective*, SCOPE 37 (1989) 491-506.
- [82] J. Nolen, J. Xin, Asymptotic spreading of KPP reactive fronts in incompressible space-time random flows, *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré Analyse Non Linéaire* 26 (2008) 815-839.
- [83] A. Okubo, Diffusion-type models for avian range expansion. In *Acta XIX Congress Internationalis Ornithologici* 1, National Museum of Natural Sciences (1988) 1038-1049. University of Ottawa Press.
- [84] A. Okubo, S.A. Levin, A theoretical framework for data analysis of wind dispersal of seeds and pollen, *Ecology* 70 (1989) 329-338.
- [85] D.N. Ostrov, Solutions of Hamilton-Jacobi equations and scalar conservation laws with discontinuous space-time dependence, *J. Differential Equations* 182 (2002) 51-77.
- [86] L. Roques, Y. Hosono, O. Bonnefon, T. Boivin, The effect of competition on the neutral intraspecific diversity of invasive species, *J. Math. Biol.* 71 (2015) 465-489.
- [87] W.V. Saarloos, Front propagation into unstable states, *Phys. Rep.* 386 (2003) 29-222.
- [88] W.X. Shen, Variational principle for Spreading speeds and generalized propagating speeds in time almost periodic and space periodic KPP models, *Trans. Amer. Math. Soc.* 362 (2010) 5125-5168.
- [89] N. Shigesada, K. Kawasaki, *Biological Invasions: Theory and Practice*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [90] H.L. Smith, *Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*, AMS, Providence, RI 1995.

- [91] P.E. Souganidis, *Front propagation: theory and applications*, C.I.M.E. Lectures 1995.
- [92] M.M. Tang, P.C. Fife, Propagating fronts for competing species equations with diffusion, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 73 (1980) 69-77.
- [93] H.R. Thieme, Density-dependent regulation of spatially distributed populations and their asymptotic speed of spread, *J. Math. Biol.* 8 (1979) 173-187.
- [94] A. Tourin, A comparison theorem for a piecewise Lipschitz continuous Hamiltonian and application to Shape-from-Shading problems, *Numer. Math.* 62 (1992) 75-85.
- [95] K. Uchiyama, The behavior of solutions of some nonlinear diffusion equations for large time, *J. Math. Kyoto Univ.* 18 (1978) 453-508.
- [96] A.I. Volpert, V.A. Volpert, V.A. Volpert, *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, *Transl. Math. Monogr.*, Amer. Math. Soc. 1994.
- [97] H. Wang, Spreading speeds and traveling waves for non-cooperative reaction-diffusion systems, *J. Nonlinear Sci.* 21 (2011) 747-83.
- [98] M.X. Wang Y. Zhang, Note on a two-species competition-diffusion model with two free boundaries, *Nonlinear Anal.* 159 (2017) 458-467.
- [99] M.X. Wang, Y. Zhang, Dynamics for a diffusive prey-predator model with different free boundaries, *J. Differential Equations* 264 (2018) 3527-3558.
- [100] H.F. Weinberger, Long-time behavior of a class of biological models, *SIAM J. Math. Anal.* 13 (1982) 353-396.
- [101] H.F. Weinberger, On spreading speed and traveling waves for growth and migration models in a periodic habitat, *J. Math. Biol.* 45 (2002) 511-548.
- [102] H.F. Weinberger, K. Kawasaki, N. Shigesada, Spreading speeds for a partially cooperative 2-species reaction-diffusion model, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 23 (2009) 1087-1098.
- [103] H.F. Weinberger, M.A. Lewis, B.T. Li, Analysis of linear determinacy for spread in cooperative models, *J. Math. Biol.* 45 (2002) 183-218.
- [104] C.-H. Wu, The minimal habitat size for spreading in a weak competition system with two free boundaries, *J. Differential Equations* 259 (2015) 873-897.

-
- [105] C.-H. Wu, Different spreading speeds in a weak competition model with two free boundaries, *J. Differential Equations* 267 (2019) 4841-4862.
- [106] D. Xiao, R. Mori, Spreading properties of a three-component reaction-diffusion model for the population of farmers and hunter-gatherers.
- [107] J. Xin, Front propagation in heterogeneous media, *SIAM Rev.* 42 (2000) 161-230.

发表文章目录

- [1] 第一作者, Asymptotic spreading of interacting species with multiple fronts I: A geometric optics approach, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A* (SCI检索, ISSN:1078-0947), 40 (2020) 3683-3714.
- [2] 第一作者, Stacked invasion waves in a competition-diffusion model with three species, *Journal of Differential Equations* (SCI检索, ISSN:0022-0396), 271 (2020) 665-718.
- [3] 第二作者, Asymptotic spreading of interacting species with multiple fronts II: Exponentially decaying initial data, submitted.