К теории общих полуупорядоченных пространств.

Л.В. Канторович и Г. Р. Лоренц (Ленинград).

/Резюме/

В настоящей статье изучаются общие полуупорядоченные пространства, не обязательно линейные, так что она может быть рассматриваема как обобщение работы Л.В. Канторовича Линейные полуупорядоченные пространства, Мат. Сб., том 2, вып. 1, стр. 122-168.

Множество $Y=\{y\}$ называем полуупорядоченным пространством, если в нем определено частичное упорядочение элементов отношением $<$, причем

I. Если $y_1<y_2$, $y_2<y_3$, то $y_1<y_3$

II. Для всякой пары y_1, y_2 существуют элементы y_3, y_4 такие, что $y_3 \leq y_1$, $y_3 \leq y_2$; $y_1 \leq y_4$, $y_2 \leq y_4$

III. Всякое ограниченное сверху множество $E \subset Y$ имеет точную верхнюю границу ($\sup E$).

IV. Для всякого множества $E \subset Y$ можно указать его исчислимое подмножество E', с такими же верхней и нижней точными границами, как у E.

Эти предположения позволяют ввести в Y понятие наибольшего предела, наименьшего предела и сходящейся последовательности. Например, полагаем

$$\overline{\lim}\, y_n = \inf_n \left[\sup (y_n, y_{n+1}, \ldots) \right].$$

Можно ввести наибольший, например, предел и иначе, определив $\lim^* y_n$ как наименьший элемент y, обладающий тем свойством, что для любой подпоследовательности $\{y_{n_k}\}$ найдется частичная $\{y_{n_{k_i}}\}$, для которой $y \geq \overline{\lim\limits_{i\to\infty}} y_{n_{k_i}}$. Получающаяся при этом сходимость, $*$-сходимость, оказывается совпадающей с топологической сходимостью, которая получится, если ~~сделать~~ превратить Y в топологическое пространство исходя из ~~сперва~~ первой определенной выше сходимости. В §§ 1 и 2 изучаются взаимоотношения между различными пределами, которые можно таким образом определить и ~~доказ~~ выводятся некоторые их свойства.

В § 3 изучаются полуупорядоченные пространства с неотрицательной метрической функцией $\rho(y_1, y_2)$, определенной для всех пар y_1, y_2 с $y_1 \leq y_2$ и обладающей свойствами:

1°. $\rho(y_1, y_2) = 0$ равносильно $y_1 = y_2$.

2°. $\rho(y_1, y_3) \leq \rho(y_1, y_2) + \rho(y_2, y_3)$ $\quad (y_1 \leq y_2 \leq y_3)$

3°. $\rho(\sup(y, y_1), \sup(y, y_2)) \leq \rho(y_1, y_2)$ (и аналогично с $\inf$).

4°. Если $y_n \to y$ монотонно, то $\rho(y_n, y) \to 0$ (или $\rho(y, y_n) \to 0$).

5°. Если y_n монотонно стремится к бесконечности, то не должно быть выполнено условие:

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(y_n, y_m) = 0$$

Положим

$$\rho(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \rho(\inf(y_1, \ldots, y_n), \sup(y_1, \ldots, y_n)).$$

Тогда $y_n \to y$ оказывается равносильным тому, что $\rho(y, y_n, \ldots, y_{n+p}) \to 0$ при $n \to \infty$, а $y_n \to y\ (*)$ равносильно $\rho(y, y_n) \to 0$. При этом выполнен и принцип сходимости

Коши. Далее, если Y дистрибутивно, т.е.

$$\cancel{\inf[\sup(}\ \inf[y, \sup(y_1, y_2)] = \sup[\inf(y, y_1), \inf(y, y_2)]$$

то оно также сильно дистрибутивно:

$$\inf[y, \sup_n y_n] = \sup_n \{\inf(y, y_n)\}.$$

В §4 мы изучаем подобные пространства при более слабых предположениях; частными случаями таких пространств оказываются пространство замкнутых множеств ~~Хаусдор~~ Hausdorff'a (см. Хаусдорф, Теория множеств, стр. 165) и пространство полунепрерывных функций.

В §5 дается приложение общих теорем к теории полунепрерывных функций $y = f(x)$, переводящих метрическое пространство $\{x\} = X$ в полуупорядоченное пространство $\{y\} = Y$. При некоторых дополнительных предположениях (Y регулярно, дистрибутивно, и между всякими двумя элементами y_1, y_2 при $y_1 < y_2$ можно вставить третий y_3, $y_1 < y_3 < y_2$) можно построить полную теорию полунепрерывных функций, включая теорему о том что всякая полунепрерывная функция есть предел монотонной последовательности непрерывных функций и ~~отдельно~~ теорему об отделимости посредством ~~при помощи~~ непрерывной функции.

Институт математики и механики
Ленинградского Государственного Университета.