~~A~~ allgemeinen Theorie der halbgeordne-
ten Räume.

L. Kantorovitch und G. Lorentz (Leningrad).

~~Als Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, auf allgemeinen halbgeordneten Räume, welche eine Verallgemeinerung~~ ~~ein Versuch einer Theorie der~~

Diese Arbeit ist einer Untersuchung von allgemeinen halbgeordneten Räumen gewidmet, welche eine Verallgemeinerung der Theorie der linearen halbgeordneten Räum ~~dienen soll~~ darstellen soll [1]).

~~In dem ersten Paragraph~~ In §1 werden ~~die~~ Axiome ~~eines~~ ~~halbgeordneten~~ Räumen und Grundbegriffe eingeführt. §2 behandelt verschiedene Limesbildungen, die in einem halbgeordneten Raume eingeführt werden können und ihre Beziehungen zueinander. Weiter in §3 untersuchen wir Räume mit metrischer Funktion. ~~Endlich wird~~ In §4 wird eine allgemeinere Klasse von Räumen von diesem Typus behandelt. Als eine Anwendung ~~kann~~ geben wir in §5 eine Theorie der halbstetigen Funktionen, deren Werte Elemente eines halbgeordneten Raumes sind.

§1. Axiome und Grundbegriffe.

Es sei in der Menge $Y=\{y\}$ ~~die Beziehung~~ für einige Paare von (verschiedenen) Elementen y_1, y_2 die Beziehung „kleiner als" $y_1 < y_2$ definiert (diese Beziehung schreiben wir auch $y_2 > y_1$).

---

1). Vgl. L.V. Kantorovitch, Lineare halbgeordnete Räume, Rec. Math. 1937, Bd. 2, ~~#~~ No1, S. 121-168. ~~[illegible]~~, O. Ore, Annals of Math. 36, p. 406-437

Axiom I. Aus $y_1 < y_2$, $y_2 < y_3$ folgt $y_1 < y_3$.

Aus diesem Axiom folgt sogleich, dass ~~aus drei~~ die ~~die~~ Beziehungen $y_1 < y_2$, $y_1 > y_2$, $y_1 = y_2$ ~~höchstens~~ einander widersprechen ~~ausschliessen~~.

Axiom II Für zwei beliebige Elemente y_1, y_2 gibt es zwei andere y_3, y_4 derart, dass $y_3 \leq y_1$, $y_3 \leq y_2$; $y_4 \geq y_1$, $y_4 \geq y_2$ (wir schreiben $y_3 \leq y_1$, wenn entweder $y_3 < y_1$, oder $y_3 = y_1$ gilt).

Eine Menge $E \subset Y$ heisst nach oben beschränkt, und y_0 ihre obere Grenze, wenn für alle $y \in E$ gilt $y \leq y_0$. Analog wird die ~~eine~~ untere Grenze einer Menge definiert.

Es ist (unter Benutzung des Axioms II,) leicht zu zeigen, dass jede endliche Menge nach ~~unten~~ oben und nach unten beschränkt ist.

Gibt es unter allen oberen Grenzen einer nach oben beschränkten Menge E eine kleinste (sie ist dann offenbar eindeutig definiert) so heisst sie das Supremum der Menge E, $\sup E = \sup\limits_{y \in E} y$. Analog wird das Infimum der Menge E $\inf E$ als die grösste ihrer unteren Grenzen (wenn es eine solche gibt) ~~Axio~~ erklärt.

Axiom III ~~Eine~~ Für jede ~~M~~ nach oben beschränkte Menge E existiert das ~~hat~~ ~~besitzt ein~~ Supremum $\sup E$.

Satz 1 ~~Eine~~ Für jede nach unten beschränkte Menge E existiert das ~~besitzt hat ein~~ Infimum $\inf E$.

<u>Beweis.</u> Wir betrachten die Menge E_1 aller unteren Grenzen von E. Diese Menge ist ~~offenbar~~ nach oben durch jedes Element y von E beschränkt und hat nach III ein Supremum $y_0 = \sup E_1$. Dieses y_0 ist offenbar das Infimum von E.

Ist eine Menge E nach oben (unten) nicht beschränkt, so schreiben wir $\sup E = +\infty$, bzw. $\inf E = -\infty$. $+\infty$ und $-\infty$ sollen dabei als ideale Elemente betrachtet werden ~~gelten~~ mit $-\infty < y < +\infty$ für alle $y \in Y$. Diese Elemente werden nur dann eingeführt wenn es in Y keinen grössten (kleinsten) Element gibt.

Es gelten folgende leicht beweisbare Beziehungen ~~Rechenregeln~~:

a). $\sup E \geq \inf E$

b). $\sup E_1 \leq \sup E_2$, $\inf E_1 \geq \inf E_2$, wenn $E_1 \subset E_2$

c). Ist $y_1 \leq y_2$ für ~~beliebig~~ alle y_1, y_2 mit $y_1 \in E_1$, $y_2 \in E_2$, so ist
$$\sup E_1 \leq \inf E_2$$

d). Für $E = \sum_{\xi \in \Xi} E_\xi$ gilt:
$$\sup E = \sup_{\xi \in \Xi} \{\sup E_\xi\} \quad ; \quad \inf E = \inf_{\xi \in \Xi} \{\inf E_\xi\}$$

e). Ist $y_\xi \leq y'_\xi$ für alle $\xi \in \Xi$, so ist $\sup_{\xi \in \Xi} \{y_\xi\} \leq \sup_{\xi \in \Xi} \{y'_\xi\}$
$$\inf_{\xi \in \Xi} \{y_\xi\} \leq \inf_{\xi \in \Xi} y'_\xi.$$

Wir führen jetzt den oberen und den unteren Grenzwert einer Folge $\{y_n\}$ ($\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$) folgendermassen ein:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n = \inf_n\{\sup(y_n, y_{n+1}, \dots)\}$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n = \sup_n\{\inf(y_n, y_{n+1}, \dots)\}.$$

Fallen sie zusammen und ist y_0 ihr gemeinsamer Wert, so nennen wir die Folge $\{y_n\}$ konvergent, und y_0 – den Grenzwert von y_n: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$

Es gilt:

a). Eine konstante Folge $\{y_n\}$, $y_n = y_0$ ~~ist~~ ist konvergent mit dem Grenzwert y_0.

b). Ist $y_n \le y_n'$, so ~~gilt~~ ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n'$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n'$.

c). Eine monoton wachsende Folge $y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n \le \dots$ ~~ist~~ konver~~gent~~giert und ihr Grenzwert ist $\sup_n\{y_n\}$.

d). Ist ~~Jede~~ ~~Teilfolge einer konvergenten Folge $\{y_n\}$ ist zu dem selben Grenzwert konvergent~~ $n_k \to \infty$, so ist $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, y_{n_k} \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$, $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, y_{n_k} \ge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$

Wir beweisen nur d). Es sei $\bar{n}_k = \inf(n_k, n_{k+1}, \dots)$, offenbar ist $\bar{n}_k \to \infty$ monoton. Dann ist:

$$\sup(y_{\bar{n}_k}, y_{\bar{n}_k+1}, \dots) \ge \sup(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}, \dots) \ge \inf(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}, \dots) \ge$$
$$\ge \inf(y_{\bar{n}_k}, y_{\bar{n}_k+1}, \dots)$$

Es folgt daraus

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \ge \overline{\lim_{k\to\infty}}\, y_{n_k} \ge \underline{\lim_{k\to\infty}}\, y_{n_k} \ge \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.

Im Raume Y werden wir noch eine ~~k~~ andere Art von Konvergenz einführen. Die Folge $\{y_n\}$ heisst $(*)$-konvergent gegen y; $y_n \to y\ (*)$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y\ (*)$, wenn es zu jeder Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ eine andere $\{y_{n_{k_i}}\}$ gibt, für welche ist $\lim_{i\to\infty} y_{n_{k_i}} = y$.

Der Raum Y wird durch die $(*)$-Konvergenz zu einem Raum vom Typus L^* von Alexandroff-Urysohn[2])

Es gilt nämlich folgendes:

1° Aus $y_n \to y\ (*)$ folgt $y_{n_k} \to y\ (*)$, $\{y_{n_k}\}$ eine Unterfolge von $\{y_n\}$

2° Ist $y_n = y$ für alle n, so ist auch $y_n \to y\ (*)$

3° Ist $y_n \to y\ (*)$ nicht erfüllt, so gibt es eine solche Unterfolge $\{y_{n_k}\}$, dass für keine ~~ihre~~ Teilfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$ die Bedingung $y_{n_{k_i}} \to y$ erfüllt ist.

Eines Beweises bedarf nur 3°. Hätte es keine solche Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ gegeben, so würden wir $y_n \to y\ (*)$ haben, entgegen der Voraussetzung. Вставка N 3

Wir führen noch weitere Axiome ein.

Axiom IV. Für jede Menge $E \subset Y$ gibt es eine abzählbare Teilmenge $E' \subset E$ derart, dass

$$\sup E' = \sup E\ ; \quad \inf E' = \inf E.$$ [4)]

---

2) Vgl. K. Kuratowski, Topologie I, S. 76.

4) Das Axiom ist auch dann erfüllt, wenn es ~~eine~~ zwei abzählbare Teilmengen E', E'' von E gibt mit $\sup E' = \sup E$, $\inf E'' = \inf E$.

Axiom Va. $\sup(y_1, \inf(y_2,y_3)) = \inf(\sup(y_1,y_2), \sup(y_1,y_3))$

Axiom Vb. $\sup(y, \inf_{k=1,2,\dots}\{y_k\}) = \inf_{k=1,2,\dots}\{\sup(y,y_k)\}$.

$\inf(y, \sup_{k=1,2,\dots}\{y_k\}) = \sup_{k=1,2,\dots}\{\inf(y,y_k)\}$

~~Hier werden~~ * wenn $\inf_k y_k$, bzw. $\sup_k y_k$ endlich ~~vorausgesetzt~~ sind.

Axiom Vc. $\sup_{\xi\in\Xi}\{\inf E_\xi\} = \inf_{\{y_\xi\}}\{\sup_{\xi\in\Xi}\{y_\xi\}\}$, $E_\xi \subset Y$

~~wo das Infimum rechts auf alle Mengen~~ ~~$\{y_\xi\}$~~ ~~erstreckt ist,~~

$\inf_{\xi\in\Xi}\{\sup E_\xi\} = \sup_{\{y_\xi\}}\{\inf_{\xi\in\Xi}\{y_\xi\}\}$. $\boxed{\text{Вставка N1}}$

Aus Va folgt das duale dazu und sogar Vc für endliche Ξ, E_ξ.[5] Aus Vb folgt leicht Vc für endliche Ξ, abzählbare E_ξ. Ist Va erfüllt, so nennen wir den Raum Y distributiv, im Falle Vb nennen wir ihn stark distributiv.[5)]

$\boxed{\text{Вставка N2}}$

§2. Limesbildungen

Wir führen folgende Limesbildungen ~~ein~~ einer Folge $\{y_n\}$ ein:

Den grössten oberen Limes $\overline{\text{olim}}\, y_n = \inf_n\{\sup(y_n, y_{n+1}, \dots)\} = \overline{\lim}\, y_n$

Den kleinsten oberen Limes $\underline{\text{olim}}\, y_n = \inf_{\{n_k\}}\{\sup_k\{y_{n_k}\}\}$ (das Infimum wird auf alle Teilfolgen von $\{y_n\}$ erstreckt.

Den grössten oberen (*) Limes $\overline{\text{olim}}^*\, y_n$ erklären wir als den kleinsten Element y, der die folgende Eigenschaft besitzt: ~~zu jeden~~ Zu jeden Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ gibt es eine weitere Unterfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$ derart dass

$$y \geq \overline{\text{olim}}_{i\to\infty}\, y_{n_{k_i}}.$$

Es können endlich duale Limes zu diesen betrachtet werden: der kleinste untere Limes, $\underline{\text{ulim}}\, y_n = \underline{\lim}\, y_n$, der grösste untere $\overline{\text{ulim}}\, y_n$ und der ~~grö~~ kleinste untere (*)-Limes $\underline{\text{ulim}}^*\, y_n$

Wir zeigen ~~zuerst~~ jetzt, dass die definierten (*)-Limes wirklich

---

5). Vgl. z.B. Ore, loc. cit.

5) Im Weiteren wird immer angegeben, welches von den Axiomen V als gültig vorausgesetzt wird.

existieren. Nach IV können wir eine solche Folge $\{y^{(\kappa)}\}$ angeben, die aus Elementen besteht, die die Eigenschaft (A) ~~sind~~ besitzen, dass $y_0 = \inf_{\kappa}\{y^{(\kappa)}\}$ gleich dem Infimum aller solchen y ist. Nehmen wir eine beliebige Teilfolge $\{y_{n_\kappa}\}$, so gibt es eine Unterfolge $\{y_{n_{\kappa_i}}\}$, für welche $y^{(1)} \geq \overline{\lim_{i\to\infty}}\, y_{n_{\kappa_i}}$; aus dieser kann man eine weitere Unterfolge $\{y_{n_{\kappa_{i_j}}}\}$ herausgreifen, für welche $y^{(2)} \geq \overline{\lim_{j\to\infty}}\, y_{n_{\kappa_{i_j}}}$ u.s.w. Für eine Diagonalfolge $\{y_{\bar n_i}\}$ von allen diesen Unterfolgen haben wir

$$y^{(\kappa)} \geq \overline{\lim_{i\to\infty}}\, y_{\bar n_i}$$

für alle κ, also auch

$$y_0 \geq \overline{\lim_{i\to\infty}}\, y_{\bar n_i}$$

y_0 hat also die Eigenschaft (A), w.z.b.w.

Für den kleinsten oberen Limes kann man auch schreiben:

$$\underline{\mathrm{olim}}\, y_n = \inf_{\{n_\kappa\}}\left\{\overline{\lim}\, y_{n_\kappa}\right\}^{9)} \qquad (1)$$

Es ist nämlich

$$\inf_{\{n_\kappa\}}\left\{\overline{\lim}\, y_{n_\kappa}\right\} = \inf_{\{n_\kappa\}}\left\{\inf_{\kappa}\{\sup(y_{n_\kappa}, y_{n_{\kappa+1}}, \dots)\}\right\} = \inf_{\{m_\kappa\}}\left\{\sup_{\kappa}\{y_{m_\kappa}\}\right\}.$$

Für die Limes gelten folgende Ungleichungen:

$$\overline{\mathrm{olim}}\, y_n \geq \overline{\mathrm{olim}}^{*} y_n \begin{matrix} \geq \overline{\mathrm{ulim}}\, y_n \\ \geq \underline{\mathrm{olim}}\, y_n \end{matrix} \geq \underline{\mathrm{ulim}}^{*} y_n \geq \mathrm{ulim}\, y_n \,. \qquad (2)$$

Ist aber das Axiom $\underline{\mathrm{V}e}$ erfüllt, so fallen alle grössten (und alle kleinsten) Limes zusammen:

---

9). Einen kleinsten oberen (*)-Limes ~~einzuführen~~ nach diesem Analogon einzuführen: $\underline{\mathrm{olim}}^{*} y_n = \inf_{\{n_\kappa\}}\{\overline{\mathrm{olim}}^{*} y_{n_\kappa}\}$ hat es keinen Sinn, denn dieses fällt zusammen mit $\underline{\mathrm{olim}}\, y_n$, wie man leicht zeigt. Wir werden deshalb $\overline{\mathrm{olim}}^{*} y_n$, $\underline{\mathrm{ulim}}^{*} y_n$ auch so schreiben: $\overline{\lim}^{*} y_n$, $\underline{\lim}^{*} y_n$.

$$\overline{O\lim} y_n = \inf_k \{\sup(y_k, y_{k+1}, \ldots)\} = \sup_{\{n_k\}}\{\inf_k\{y_{n_k}\}\} = \underline{U\lim} y_n$$

Satz 3. Damit eine Folge $\{y_n\}$ ~~gegen das Element y~~ $V(*)$-konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\overline{O\lim^*} y_n = \underline{U\lim^*} y_n \; ; \qquad (3)$$

$\lim^* y_n$ ist dann diesen beiden Limes gleich.

Beweis. Es sei ~~Ist~~ die Folge $\{y_n\}$ $(*)$-konvergent und $\lim^* y_n = y$. Das Element y erfüllt offenbar die Bedingung (A), es ist also $y \geq \overline{O\lim^*} y_n$. Ähnlich wird $y \leq \underline{U\lim^*} y_n$ bewiesen, was mit (2) zusammen (3) ergibt.

Umgekehrt, sei (3) erfüllt und $y = \overline{O\lim^*} y_n$. ~~Da~~ Zu jeder Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ gibt es dann eine ~~weit~~ weitere Teilfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$, für welche $y \geq \overline{\lim_i} y_{n_{k_i}}$. Nach (3) und der Definition des unteren $(*)$-Limes lässt sich eine andere Teilfolge $\{y_{n_{k_{i_j}}}\}$ aussondern, für welche gilt

$$y \leq \underline{\lim_j} y_{n_{k_{i_j}}}.$$

Es ist also

$$y = \lim_j y_{n_{k_{i_j}}},$$

und wir haben $y_n \to y \; (*)$ bewiesen.

In den folgenden Sätzen wird das Axiom $\underline{V6}$ benutzt.

Satz 4. Der obere Limes $\overline{y} = \overline{\lim} y_n$ ist das kleinste y

für das ~~die~~ gilt:

$$\sup(y, y_n) \longrightarrow y \qquad (4).$$

Beweis: Ist $\overline{y} = -\infty$, so ist unsere Behauptung offenbar richtig. Wir dürfen also $\overline{y} > -\infty$ voraussetzen. ~~Dann ist~~ ~~inf~~ Bezeichnen wir $\overline{y}_k = \sup(y_k, y_{k+1}, \dots)$. Die Bedingung (4) ist mit der folgenden gleichbedeutend:

$$y = \overline{\lim_{n\to\infty}} \{\sup(y, y_n)\},$$

dass heisst

$$y = \inf_k \{\sup(y, y_k, y_{k+1}, \dots)\} = \inf_k \{\sup(y, \overline{y}_k)\} =$$
$$= \sup(y, \inf_k \{\overline{y}_k\}) = \sup(y, \overline{y}),$$

oder $y \geq \overline{y}$

Satz 5. Der obere (*)-Limes $\overline{y}^* = \overline{\lim}^* y_n$ ist das kleinste Element y, für welches gilt

$$\sup(y, y_n) \longrightarrow y \ (*). \qquad (5)$$

In der Tat, diese Bedingung ist damit gleichbedeutend, dass ~~für~~ aus jeder Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ eine weitere $\{y_{n_{k_i}}\}$ sich aussondern lässt, für ~~d~~ welche gilt

$$\sup(y, y_{n_{k_i}}) \to y,$$

dass heisst

$$y \geq \overline{\lim}\, y_{n_{i_k}}.$$

Nach der Definition des oberen (*)-Limes bedeutet also (5)

$$y \geq \overline{\lim}{}^* y_n, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

<u>Satz 6</u> Es gilt:

a). $\underline{\lim}_n \{\sup(y_n, y'_n)\} \geq \sup(\underline{\lim}_n \{y_n\}, \underline{\lim}\, y'_n)$

b). $\overline{\lim}_n \{\sup(y_n, y'_n)\} = \sup(\overline{\lim}\, y_n, \overline{\lim}\, y'_n)$

Es gelten die Formeln a*), b*), wo lim durch lim* ersetzt ist und endlich duale zu den vier angegebenen ($\overline{\lim}$ mit $\underline{\lim}$ zu ersetzen und sup mit inf)!

<u>Beweis</u>. a) und a*) sind evident; wir beweisen nur b) und b*). Im weiteren setzen wir $\overline{y}_n = \sup(y_n, y_{n+1}, \ldots)$ $\overline{y}'_n = \sup(\ldots)$

b). $\overline{\lim}\{\sup(y_n, y'_n)\} \leq \overline{\lim}\{\sup(\overline{y}_n, \overline{y}'_n)\} = \inf_n \{\sup(\overline{y}_n, \overline{y}'_n)\} =$

$= \inf_{n,m} \{\sup(\overline{y}_n, \overline{y}'_m)\} = \sup\left(\inf_n \{\overline{y}_n\}, \inf_m \{\overline{y}'_m\}\right) = \sup(\overline{\lim}\, y_n, \overline{\lim}\, y'_m)$

Die umgekehrte Ungleichung ist aber trivial.

b*) Es ist ~~b*) Es ist~~ $\overline{\lim}{}^*(\sup(y_n, y'_n)) \geq \sup(\overline{\lim}{}^* y_n, \overline{\lim}{}^* y'_n) = y_0$. (6)

Aus der Definition des oberen *-Limes folgt, dass es zu jeder Teilfolge ~~eine~~ $\{y_{n_k}\}$ eine weitere $\{y_{n_{k_i}}\}$ gibt, für welche gleichzeitig

$$y_0 \geq \overline{\lim_i}\, y_{n_{k_i}}, \qquad y_0 \geq \overline{\lim_i}\, y'_{n_{k_i}}.$$

Daraus ergibt sich **nach 6)**

$$y_0 \geq \sup\left(\overline{\lim}\, y_{n_{k_i}}, \overline{\lim}\, y'_{n_{k_i}}\right) = \overline{\lim_i}\left(\sup(y_{n_{k_i}}, y'_{n_{k_i}})\right),$$

und wenn man alles zusammenfasst:

$$y_0 \geq \overline{\lim}^{*}\left(\sup(y_n, y'_n)\right).$$

Mit (6) zusammen ergibt das 6*).

Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass ~~lim~~ sup und ~~lim*~~ inf inbezug auf ~~lim und lim* stetig~~ die gewöhnliche und die (*)-Konvergenz stetig sind: aus $y_n \to y$, $y'_n \to y'$ folgt $\sup(y_n, y'_n) \to \sup(y, y')$, $\inf(y_n, y'_n) \to \inf(y, y')$ u.s.w.

§3. Räume mit metrischer Funktion.

Wir betrachten jetzt einen Raum $Y = \{y\}$, in dem die Axiome I–III[10] und Va erfüllt sind. Es sei für jedes Paar von vergleichbaren Elementen, y_1, y_2 $(y_1 \leq y_2)$ die nichtnegative Funktion $\rho(y_1, y_2)$ definiert, die wir als metrische Funktion des Raumes Y bezeichnen und die folgenden Bedingungen erfüllen soll:

1°. $\rho(y_1, y_2) = 0$ ist mit $y_1 = y_2$ gleichbedeutend.

2°. $\rho(y_1, y_2) + \rho(y_2, y_3) \geq \rho(y_1, y_3) \qquad (y_1 \leq y_2 \leq y_3)$

3°. $\rho(y_1, y_2) \geq \rho\left(\sup(y, y_1), \sup(y, y_2)\right)$

$\rho(y_1, y_2) \geq \rho\left(\inf(y, y_1), \inf(y, y_2)\right)$

---

10) Es genügt, ~~wenn~~ das Axiom III nur für abzählbare E geltend vorauszusetzen.

4° Konvergiert y_n monoton gegen y, so ist $\rho(y, y_n) \to 0$ [bzw. $\rho(y_n, y) \to 0$].

5° Für keine monoton gegen $+\infty$ oder $-\infty$ konvergierende Folge $\{y_n\}$ soll sein

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(y_n, y_m) = 0.$$

~~Als~~ Spezialfälle solcher Räume ~~kann man~~ sind z.B. die linearen halbgeordneten Räume[11], oder ihre Untermengen.

Wir setzen allgemein

$$\rho(y_1, y_2, \dots, y_n) = \rho\left(\inf(y_1, \dots, y_n), \sup(y_1, \dots, y_n)\right)$$

Dann wird 1°, 3° für beliebige y_1, y_2 richtig. Es ist z.B. ~~um 3° zu beweisen~~

$$\rho(y_1, y_2) = \rho\left(\inf(y_1, y_2), \sup(y_1, y_2)\right) \geq \rho\left(\sup(y, \inf(y_1, y_2)), \sup(y, \sup(y_1, y_2))\right) =$$

$$= \rho\left(\inf(y_1', y_2'), \sup(y_1', y_2')\right) = \rho(y_1', y_2'),$$

wo $y_1' = \sup(y, y_1)$, $y_2' = \sup(y, y_2)$ gesetzt wurde.

Aus 3° folgt für $y_1 \leq y_2 \leq y_3$:

$$\rho(y_1, y_2) \leq \rho(y_1, y_3) \;;\quad \rho(y_2, y_3) \leq \rho(y_1, y_3) \qquad (1).$$

Die Dreieckungleichung gilt im allgemeinen nicht; als ein Ersatz dafür kann die Ungleichung dienen

---

11) Vgl. Kantorovitch, loc. cit., §8.

$$\cancel{\rho(y_1,y_2)+\rho(y_2,y_3)=\rho(\inf(y_1,y_2),\sup(y_1,y_2))+\rho(\inf(y_2,y_3),\sup(y_2,y_3))\geq}$$
$$\cancel{\geq\rho(\inf(y_1,y_2),\sup(y_1,y_2))+}$$

$$\rho(y_1,y_2)+\rho(y_2,y_3)+\dots+\rho(y_{n-1},y_n)\geq\rho(\inf(y_1,y_2),\sup(y_1,y_2))+$$
$$+\rho\Big(\sup(y_1,\inf(y_2,y_3)),\sup(y_1,\sup(y_2,y_3))\Big)+\dots+$$
$$+\rho\Big(\sup(y_1,y_2,\dots,y_{n-2},\inf(y_{n-1},y_n)),\sup(y_1,\dots,y_{n-2},\sup(y_{n-1},y_n))\Big)\geq$$
$$\geq\rho\Big(\inf(y_1,y_2),\sup(y_1,y_2,\dots,y_n)\Big)$$

(wir benutzten 3°, (1) und Folgerung aus Axiom Va). Ebenso ist

$$\rho(y_1,y_2)+\dots+\rho(y_{n-1},y_n)\geq\rho\Big(\inf(y_1,y_2,\dots,y_n),\sup(y_1,y_2)\Big)$$

und es folgt

$$\rho(y_1,y_2,\dots,y_n)\leq 2\rho(y_1,y_2)+\dots+2\rho(y_{n-1},y_n) \qquad (2).$$

Für $n=3$ haben wir

$$\rho(y_1,y_2,y_3)\leq\rho(\inf(y_1,y_2,y_3),\inf(y_1,y_2))+\rho(\inf(y_1,y_2),\sup(y_1,y_2,y_3))\leq$$
$$\leq\cancel{2\rho(y_2,y_3)}\ \rho(y_1,y_2)+2\rho(y_2,y_3) \qquad (3)$$

Umsomehr ist

$$\rho(y_1,y_3)\leq\rho(y_1,y_2)+2\rho(y_2,y_3)$$

und daraus folgt leicht

$$|\rho(y_1,y_2)-\rho(y_1,y_3)|\leq 2\rho(y_2,y_3) \qquad (4)$$

Als Verallgemeinerung haben wir

$$|\rho(y_1,y_2)-\rho(z_1,z_2)|\leq|\rho(y_1,y_2)-\rho(y_1,z_2)|+|\rho(y_1,z_2)-\rho(z_1,z_2)|\leq 2\rho(y_2,z_2)+2\rho(y_1$$

Setzen wir $i = \inf(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $s = \sup(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, so wird

$$|\rho(y_1, y_2, \ldots, y_n, y) - \rho(y_1, y_2, \ldots, y_n, z)| = |\rho(\inf(i,y), \sup(s,y)) - \rho(\inf(i,z), \sup(s,z))|$$
$$\leq 2\rho(y, z) + 2\rho(y, z) = 4\rho(y, z)$$

Daraus folgt leicht

$$|\rho(y_1, y_2, \ldots, y_n) - \rho(z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leq 4\rho(y_1, z_1) + \ldots + 4\rho(y_n, z_n). \quad (5)$$

Endlich führen wir die folgenden Ungleichungen an:

$$\left.\begin{aligned} &\rho(\sup(y_1, z_1), \sup(y_2, z_2), \ldots, \sup(y_n, z_n)) \leq \rho(y_1, \ldots, y_n) + \rho(z_1, \ldots, z_n) \\ &\rho(\inf(y_1, z_1), \ldots, \inf(y_n, z_n)) \leq \rho(y_1, \ldots, y_n) + \rho(z_1, \ldots, z_n) \end{aligned}\right\} (6)$$

Es werde z.B. die erste Ungleichung bewiesen:

$$\rho(\sup(y_1, z_1), \ldots, \sup(y_n, z_n)) = \rho(\inf[\sup(y_1, z_1), \ldots, \sup(y_n, z_n)], \sup[y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n])$$
$$\leq \rho(\inf[\sup(y_1, z_1), \ldots, \sup(y_n, z_n)], \sup[y_1, \ldots, y_n, \inf(z_1, \ldots, z_n)]) +$$
$$+ \rho(\sup[y_1, \ldots, y_n, \inf(z_1, \ldots, z_n)], \sup[y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n])$$

Diese letzte Ungleichung folgt aus 3°, denn wir haben

$$\sup[y_1, \ldots, y_n, \inf(z_1, \ldots, z_n)] = \inf_k [\sup(y_1, \ldots, y_n, z_k)] \geq \inf_k [\sup(y_k, z_k)].$$

Es folgt weiter

$$\rho(\sup(y_1, z_1), \ldots, \sup(y_n, z_n)) \leq \rho(\sup[\inf(y_1, \ldots, y_n), \inf(z_1, \ldots, z_n)], \overbrace{}^{\sup[\sup(y_1, \ldots, y_n), \inf(z_1, \ldots, z_n)]}) +$$
$$+ \rho(\inf(z_1, \ldots, z_n), \sup(z_1, \ldots, z_n)) \leq \rho(y_1, \ldots, y_n) + \rho(z_1, \ldots, z_n), \text{ w.z.b.w.}$$

Satz 7. $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ist eine stetige Funktion von $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass aus $y^{(k)} \to y$ $\rho(y^{(k)}, y) \to 0$ folgt. Es sei $\tilde{y}^{(k)} = \inf_{n \geq k} y^{(n)}$, $\bar{y}^{(k)} = \sup_{n \geq k} y^{(n)}$. Dann streben $\tilde{y}^{(k)}$, $\bar{y}^{(k)}$ monoton gegen y und deshalb ist nach 4°

$$\rho(\tilde{y}^{(k)}, \bar{y}^{(k)}) \leq \rho(\tilde{y}^{(k)}, y) + \rho(y, \bar{y}^{(k)}) \to 0.$$

Da y und $y^{(k)}$ zwischen $\tilde{y}^{(k)}$ und $\bar{y}^{(k)}$ liegen, ist umsomehr

$$\rho(y^{(k)}, y) \to 0.$$

Nun sei $y_i^{(k)} \to y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dann ist nach (5)

$$|\rho(y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}) - \rho(y_1, \ldots, y_n)| \leq 4\rho(y_1^{(k)}, y_1) + \cdots + 4\rho(y_n^{(k)}, y_n) \to 0, \text{ w.z.b.w.}$$

Bemerkung. Wie man sich leicht überzeugt, ~~trifft~~ ist unsere Behauptung auch in Bezug auf die (*)-Konvergenz richtig.

Satz 8. Damit ~~es ein Element~~ die Folge $\{y_n\}$ gegen ein endliches Element konvergiere, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\lim_{n \to \infty} \rho(y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}) = 0. \qquad (7)$$

Beweis. Ist die Folge gegen y konvergent, und $\tilde{y}_n$, $\bar{y}_n$ ähnlich wie in Satz 7 definiert, so ist nach 4° $\rho(\tilde{y}_n, y) \to 0$, $\rho(\bar{y}_n, y) \to 0$.
Es ist aber

$$\rho(y_n, \ldots, y_{n+p}, y) \leq \rho(\tilde{y}_n, \bar{y}_n) \leq \overbrace{\rho(\tilde{y}_n, y)}^{\to \rho(y,y) = 0} + \rho(y, \bar{y}_n) \to 0,$$

also sogar mehr, was nötig war.

Es sei jetzt die Bedingung (7) erfüllt. Wir setzen

$$\overline{y}_n^m = \sup(y_n, \ldots, y_m) \qquad (m > n)$$

Es ist

$$\rho(\overline{y}_n^m, \overline{y}_n^{m+p}) = \rho\left(\sup(y_n, \ldots, y_m), \sup(y_n, \ldots, y_{m+p})\right) \leq$$

$$\leq \rho\left(y_m, \sup(y_m, \ldots, y_{m+p})\right) \leq \rho(y_m, \ldots, y_{m+p}) \to 0 \quad \text{für } m \to \infty.$$

Nach Axiom 5° ist also die monotone Folge $\overline{y}_n^m$ gegen ein <u>endliches</u> Element $\overline{y}_n$ konvergent. Ebenso ist endlich

$$\tilde{y}_n = \inf(y_n, y_{n+1}, \ldots)$$

Es folgt daraus, dass auch die Elemente

$$\sup \tilde{y}_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n = y_* \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{y}_n = \inf \overline{y}_n = y^*, \quad y_* \leq y^*$$

endlich sind. Wir haben nach Satz 7.

$$\rho(\tilde{y}_n, \overline{y}_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(\overline{y}_n, y_{n+1}, \ldots, y_m)$$

$$\rho(y_*, y^*) \leq \inf_n \rho(\tilde{y}_n, \overline{y}_n) = 0,$$

also: $y_* = y^*$, w. z. b. w.

<u>Satz 9.</u> Damit die Folge $\{y_n\}$ gegen das Element y konvergiere, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}, y) = 0.$$

Beweis. Die Notwendigkeit wurde oben schon gezeigt; dass die Bedingung auch hinreichend ist, sieht man sofort ein, wenn man ~~den vorstehenden Satz an~~ die Folge $y_1, y, y_2, y, y_3, \dots$ betrachtet ~~anwendet~~; sie ist nach dem vorstehenden Satz konvergent. Ihr Limes kann aber nur y sein; es ist dann auch $y_n \to y$.

Satz 10. Damit die Folge $\{y_n\}$ gegen das Element y $(*)$-Kovergiere, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y) = 0, \quad (8)$$

Beweis. Es sei $y_n \to y\,(*)$. Wäre dann (8) nicht erfüllt, so würde es dann eine Teilfolge $\{y_{n_i}\}$ und $\varepsilon > 0$ ~~geben~~, mit $\rho(y_{n_i}, y) \geq \varepsilon$ geben. Aus dieser Folge ist es nicht möglich, nach Satz , eine gegen y konvergente Folge herauszugreifen. Das widerspricht aber der Definition der $(*)$-Konvergenz.

Es sei jetzt (8) erfüllt. Es sei eine wachsende Folge ganzer Zahlen $n_1, n_2, \dots$ so gewählt, dass

$$\rho(y_n, y) < \frac{1}{2^k} \quad \text{für } n \geq n_k.$$

Dann ist nach (2)

$$\rho(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}, \dots, y_{n_{k+p}}, y) = \rho(y_{n_k}, y, y_{n_{k+1}}, y, \dots, y_{n_{k+p}}) \leq$$

$$\leq 4\rho(y_{n_k}, y) + 4\rho(y_{n_{k+1}}, y) + \cdots \leq 4\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots\right) = \frac{1}{2^{k-3}} \longrightarrow 0.$$

Nach Satz haben wir also $y_{n_k} \to y$.

<u>Satz 11</u>. Damit die Folge $\{y_n\}$ gegen ein endliches Element konvergiere, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y_{n+p}) = 0. \qquad (9)$$

Die Notwendigkeit folgt aus dem vorstehenden ~~Satz~~ und (3).
Umgekehrt, ist (9) erfüllt, so kann man leicht eine Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ angeben, für welche gilt

$$\lim_{k\to\infty} \rho(y_{n_k}, \ldots, y_{n_{k+p}}) = 0.$$

~~Nach~~ Dann ist $y_{n_k} \to y$ (y endlich), also $\rho(y_{n_k}, y) \to 0$. Daraus und aus (9) folgt dann $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(y_n, y) = 0$, ~~also~~ $y_n \to y\,(*)$.

<u>Satz 12</u>. Aus $y_n \to y$, $y_n' \to y'$ folgt $\sup(y_n, y_n') \to \sup(y, y')$.
Aus $y_n \to y\,(*)$, $y_n' \to y'\,(*)$ folgt $\sup(y_n, y_n') \to \sup(y, y')\,(*)$.
y, y' ~~sind~~ werden von $-\infty$ verschieden vorausgesetzt; ähnliches gilt für inf statt sup.

Die Behauptungen folgen unmittelbar aus den Ungleichungen (5):

$$\rho\Big(\sup(y_n, y_n'), \ldots, \sup(y_{n+p}, y_{n+p}'), \sup(y, y')\Big) \leq \rho(y_n, \ldots, y_{n+p}, y) + \rho(y_n', \ldots, y_{n+p}', y')$$

$$\rho\big(\sup(y_n, y_n'), \sup(y, y')\big) \leq \rho(y_n, y) + \rho(y_n', y').$$

<u>Satz 13</u>. Aus den Axiomen I–III[12], Va, 1°–5° folgt Vb.

12) Vgl. Fussnote 10).

Beweis. Es sei $\inf_n y_n \neq -\infty$ (y beliebig). ~~Es~~ Dann ist, unter Benutzung des vorigen Satzes,

$$\inf_n\{\sup(y,y_n)\} = \lim_{n\to\infty}\inf_{k\le n}\{\sup(y,y_k)\} = \lim_{n\to\infty}\sup(y,\inf_{k\le n}\{y_k\}) = \cancel{\sup}$$

$$= \sup(y, \inf_n\{y_n\}).$$

Ähnlich wird auch die zweite Hälfte von V6 bewiesen.

Genügt die metrische Funktion der Ungleichung

$$\rho(y_1,y_2) < \rho(y_1,y_3) \qquad \text{für } y_1 \le y_2 < y_3,$$

so ~~wird~~ folgt auch das Axiom IV aus den übrigen ~~beweisbar~~. Ausserdem kann ~~dann~~ in III die Existenz des ~~oberen Grenze~~ Supremum nur für (nach oben beschränkte) abzählbare Mengen gefordert werden, für unabzählbare wird das beweisbar[13].

~~Man kan~~ Unter den zu Anfang dieses § gemachten Voraussetzungen kann man ~~für~~ in Y eine andere metrische Funktion $\tau(y_1,y_2)$ einführen, die (für alle y_1, y_2 ~~def~~ den Sinn hat,) den Bedingungen 1°–5° ~~genügt~~ und ~~au~~ ausserdem noch der Dreieckbedingung genügt und ~~mit~~ der metrischen Funktion $\rho(y_1,y_2)$ equivalent ist (d. h., $\rho(y,y_n)\to 0$ und $\tau(y,y_n)\to 0$ bedeutet dasselbe). ~~Man kann z. B. setzen~~ ~~Be~~ Betrachten wir:

$$\tau(y,y') = \inf_{y_1,y_2,\dots,y_n;\,n}\{\rho(y,y_1)+\rho(y_1,y_2)+\dots+\rho(y_n,y')\}.$$

Es ist nach 2)

$$\tfrac{1}{2}\rho(y,y') \le \tau(y,y') \le \rho(y,y')$$

---

13). Wegen des Beweises vgl. Kantorovitch, loc. cit., ~~Rec. Math., Bd 2~~, insb. S. 148 oder Beispiel 3 in §1.

~~Alle Bedingungen 1°, 2°, (für beliebige y), 4°, 5°~~ ~~Diese Fu~~
$z(y_1, y_2)$ hat alle angeführten Eigenschaften; so ist z. B.

$$z(y,y') = \inf_{y_1,\dots,y_n,n}\{\varrho(y,y_1)+\dots+\varrho(y_n,y')\} \geq \inf\left\{\varrho\big(\sup(y,z),\sup(y_1,z)\big)+\dots+\varrho\big(\sup(y_n,z),\sup(y',z)\big)\right\}$$

$$\geq \inf_{z_1,\dots,z_n,n}\left\{\varrho\big(\sup(y,z), z_1\big)+\dots+\varrho\big(z_n,\sup(y',z)\big)\right\} = z\big(\sup(y,z),\sup(y',z)\big),$$

für beliebige y, y', z.

Es sei noch erwähnt, dass das Axiom 2° durch das folgende schwächere sich ersetzen lässt:

2*. Es gibt eine positive Funktion $\varphi(\varepsilon)$, die für alle $\varepsilon > 0$ definiert ist derart, dass aus $y_1 \leq y_2 \leq y_3$ und

$\varrho(y_1, y_2) < \varepsilon$, $\varrho(y_2, y_3) < \varepsilon$ folgt $\varrho(y_1, y_3) < \varphi(\varepsilon)$.

Dann lässt sich eine mit $\varrho(y_1, y_2)$ equivalente Funktion einführen, für welche 1°–5° gelten[14]

§4. Räume mit metrischer Funktion, die unsymmetrisch ist inbezug auf Infimum und Supremum.

Wir betrachten jetzt eine allgemeinere Klasse von Räumen, als die in §3 betrachtete. Es sei $Y = \{y\}$ ein halbgeordneter Raum, im welchen die Axiome I–IV[15] und die erste Hälfte von Axiom V6

$$\sup(y, \inf_n y_n) = \inf_n(\sup(y, y_n)).$$

14) Man vergleiche z. B. Frink, Bull. A. M. S. vol. 43, n° 2, 1937, S. 133–142

15) Aus dem Axiom II brauchen wir weiter nur die erste Hälfte (mit sup.)

Ausserdem soll in Y für ~~f~~ vergleichbare y_1, y_2 ($y_1 \le y_2$) die nichtnegative ~~Fu~~ metrische Funktion $\varrho(y_1, y_2)$ definiert sein mit den Eigenschaften 1°, 2°, 4° des §3 und den folgenden:

3^*_3 $$\varrho(\sup(y, y_1), \sup(y, y_2)) \le \varrho(y_1, y_2)$$
$$\varrho(y_1, y_2) \le \varrho(y_1, y_3) \quad \text{für } y_1 \le y_2 \le y_3$$

5^*_3. Für keine gegen $+\infty$ konvergente Folge $\{y_n\}$ soll sein

$$\lim_{n, m} \varrho(y_n, y_m) = 0.$$

~~Aus 3°_3 folgt dann~~

$$\cancel{\varrho(y_1, y_3) \ge \varrho(y_2, y_3) \quad \text{für } y_1 \le y_2 \le y_3.}$$

Wir setzen ~~allgemein~~ für beliebige y_1, y_2

$$\varrho(y_1, y_2) = \varrho(y_1, \sup(y_1, y_2))$$

Dann gilt für beliebige y_1, y_2 ~~A und auch~~ 3°_3:

$$\varrho(y_1, y_2) = \varrho(y_1, \sup(y_1, y_2)) \ge \varrho(\sup(y_1, y), \sup(y_1, y_2, y)) = \varrho(\sup(y_1, y), \sup(y_2, y))$$

Aus 3* folgt:

$\varrho(y_1, y_2) = 0$ ist mit $y_2 \le y_1$ gleichbedeutend. ~~Aus 3°_3 folgt~~

$$\cancel{\varrho(y_1, y_3) \ge \varrho(y_2, y_3)} \quad \text{für } y_1 \le y_2 \le y_3$$

~~[Die Ungleichung $\varrho(y_1, y_3) \ge \varrho(y_1, y_2)$ braucht dabei nicht erfüllt zu sein; ist sie immer richtig, so~~ ~~erfüllt~~ ~~gilt für die metrische Funktion die allgemeine Dreieckungleichung[1]]~~

Satz 14 Für die Ungleichung $y \ge \lim y_n$ ist notwendig und hinreichend, dass

---

1) ~~Die Dreieckungleichung ist auch ohne diese Voraussetzung im Fall $y_2 < y_3$ bestimmt erfüllt.~~ Es gilt die Dreieckungleichung:

$$\varrho(y_1, y_3) \le \varrho(y_1, \sup(y_2, y_3)) \le \cancel{\varrho(y_1, y_2) + \varrho(y} \le \varrho(y_1, \sup(y_1, y_2)) + \varrho(\sup(y_1, y_2), \sup(y_1, y_2, y_3))$$
$$\le \varrho(y_1, y_2) + \varrho(y_2, y_3)$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(y, \sup(y_n, \dots, y_{n+p})\right) = 0 \quad (p>0)$$

Dabei wird $\underline{\lim}\, y_n > -\infty$ ~~vorausgesetzt~~ ist vorausgesetzt.

<u>Beweis</u> Die Bedingung ist hinreichend. ~~In der Tat, sei~~ Es sei

$$\overline{y}_n^{m} = \sup(y, y_n, \dots, y_m), \quad \overline{y}_n = \sup(y, y_n, \dots) \quad (m>n)$$

Dann ist

$$\rho(\overline{y}_n^m, \overline{y}_n^{m+p}) = \rho\left(\sup(y, y_n, \dots, y_m), \sup(y, y_n, \dots, y_{m+p})\right) \leq$$

$$\leq \rho\left(y, \sup(y, y_m, \dots, y_{m+p})\right) \to 0.$$

Nach 5^* ~~exis~~ ist also $\overline{y}_n = \lim_m \overline{y}_n^m$ endlich.

Aus der Ungleichung

$$\rho(y, \overline{y}_n) \leq \rho(y, \overline{y}_n^m) + \rho(\overline{y}_n^m, \overline{y}_n)$$

folgt, wenn man 4° heranzieht, dass $\rho(y, \overline{y}_n) \to 0$.

Dann ist ~~auch~~ ~~$\rho(y, \inf_n \overline{y}_n) \leq \inf$~~

$$\rho(y, \inf_n \overline{y}_n) \leq \inf_n \rho(y, \overline{y}_n) = 0, \qquad \inf_n \overline{y}_n \leq y$$

Es ist aber

$$\inf_n \overline{y}_n = \inf_n \left\{\sup\left(y, \sup_{k\geq n} y_k\right)\right\} = \sup\left(y, \inf_n\left\{\sup_{k\geq n} y_k\right\}\right) = \sup(y, \overline{\lim}\, y_n)$$

und deshalb $y \geq \overline{\lim}\, y_n$.

~~Um~~ Die Bedingung ist notwendig. Aus $y \geq \overline{\lim}\, y_n$ folgt

$$\cancel{\rho\left(y, \sup_{k\geq n} y_k\right) \leq \rho(y, \overline{\lim}\, y_k) + \rho\left(\overline{\lim}\, y_k, \sup_{k\geq n} y_k\right) = \rho\left(\overline{\lim}\, y_k, \sup_{k\geq n} y_k\right) \to 0}$$

~~nach 4°~~ ~~Wenn man $\overline{z}_n = \sup_{k\geq n} y_k$ setzt,~~

$$\cancel{\rho\left(y, \sup(y, \overline{z}_n)\right) \leq \rho\left(y, \sup(y, \overline{\lim}\, y_n)\right) + \rho\left(\sup(y, \overline{\lim}\, y_n), \sup(y, \overline{z}_n)\right)}$$

~~Der erste Summand ist gleich Null, der zweite strebt gegen 0 nach 4°. Deshalb ist~~

$$\cancel{\rho(y, \sup(y, y_n)) \to 0}$$

~~Umsomehr ist unsere Bedingung erfüllt.~~

~~Satz~~

$$\rho(y, \sup_{k \geq n} y_k) \leq \rho(y, \overline{\lim}\, y_k) + \rho(\overline{\lim}\, y_k, \sup_{k \geq n} y_k) = \rho(\overline{\lim}\, y_k, \sup_{k \geq n} y_k) \to 0$$

nach 4°. Umsomehr ist unsere Bedingung erfüllt.

<u>Satz 15</u>. Für die Ungleichung $y \geq o\overline{\lim}^* y_n$ ist die Bedingung

$$\rho(y, y_n) \to 0 \qquad (10)$$

hinreichend; ist für keine Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ $\overline{\lim}\, y_{n_k} = -\infty$, so ist sie auch notwendig.

<u>Beweis</u>. Es sei (10) erfüllt. Aus der Ungleichung $(m > n)$

$$\rho(y, \sup(y, y_n)) + \rho(y, \sup(y, y_{n+1})) + \cdots + \rho(y, \sup(y, y_m)) \geq$$

$$\geq \rho(y, \sup(y, y_n)) + \rho(\sup(y, y_n), \sup(y, y_n, y_{n+1})) + \cdots + \rho(\sup(y, y_n, \ldots, y_{m-1}), \sup(y, y_n, \ldots, y_m)) \geq$$

$$\geq \rho(y, \cancel{\sup(y, y} \sup(y_n, \ldots, y_m))$$

folgt leicht, dass es eine Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ gibt, für welche die Bedingung des vorigen Satzes zutrifft. Dann ist aber $y \geq \overline{\lim}\, y_{n_k}$. Da diese Schlussweise auch für jede Teilfolge von $\{y_n\}$ gilt, so ist $y \geq \overline{\lim}^* y_n$.

Um die Notwendigkeit zu beweisen, setzen wir voraus, dass $\rho(y, y_n)$ ~~konvergiert~~ nicht gegen Null (konvergiert). Dann ist für eine bestimmte Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ $\rho(y, y_{n_k}) \geq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Aus dieser Folge, nach Satz   kann keine Unterfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$ herausgegriffen werden, für welche $y \geq \overline{\lim}\, y_{n_{k_i}}$ sein würde. Das widerspricht aber der Definition des oberen $(*)$-Limes.

Die zusätzliche Bedingung des Satzes   ist isbesondere dann erfüllt, wenn der Raum Y die folgende Eigenschaft besitzt:

6°. Für jede Folge $\{y_n\}$ ist $\overline{\lim}\, y_n > -\infty$.

Wir definieren jetzt den grössten und den kleinsten metrischen Limes $\rho\overline{\lim}\, y_n$ ~~und~~ bzw. $\rho\underline{\lim}\, y_n$ folgendermassen: $\rho\overline{\lim}\, y_n$ ist das kleinste y, das der Bedingung $\rho(y, y_n) \to 0$ genügt. $\rho\underline{\lim}\, y_n$ ist das grösste y, für das gilt $\rho(y_n, y) \to 0$. Wenn es keine solche y gibt, so setzen wir $\rho\overline{\lim}\, y_n = +\infty$ bzw. $\rho\underline{\lim}\, y_n = -\infty$.

Ist die Bedingung 6° erfüllt, so folgt aus Satz   dass $\rho\overline{\lim}\, y_n$ stets existiert und es ist

$$\rho\overline{\lim}\, y_n = \overline{o\lim}^{*}\, y_n.$$

Wir zeigen nun, dass auch $\rho\underline{\lim}\, y_n$ immer den Sinn hat.

Aus $\varrho(y_n, y) \to 0$, $\varrho(y_n, y') \to 0$ folgt

$$\varrho(y_n, \sup(y,y')) \leq \varrho(y_n, \sup(y,y_n)) + \varrho(\sup(y,y_n), \sup(y,y',y_n)) \leq \varrho(y_n,y) + \varrho(y_n,y') \to 0$$

und ebenso ~~w~~ für ~~eine~~ beliebige endliche Anzahl solcher y.

Es sei jetzt $\{y^{(\kappa)}\}$ eine ~~abzählbare~~ Folge von Elementen y, für welche gilt $\varrho(y_n, y) \to 0$, die so beschaffen ist, dass $\sup y^{(\kappa)} = y_0$ gleich dem Supremum aller solcher y ist. Man kann offenbar $y^{(\kappa)}$ monoton wachsend annehmen. Aus der Ungleichung

$$\varrho(y_n, y_0) \leq \varrho(y_n, y^{(\kappa)}) + \varrho(y^{(\kappa)}, y_0)$$

folgt, dass auch $\varrho(y_n, y_0) \to 0$, y_0 ist also der kleinste metrische Limes.

Satz 16. Es ist

$$\underline{O\lim}\, y_n \geq \underline{\varrho\lim}\, y_n \geq \underline{U\lim^*}\, y_n \qquad (10).$$

Es wird dabei ~~$U\lim^* y_n < +\infty$~~ vorausgesetzt, dass für keine Unterfolge $\{y_{n_\kappa}\}$ ist $\underline{\lim}\, y_{n_\kappa} = +\infty$.

Beweis. Es sei $\varrho(y_n, y) \to 0$. Dann ist umsomehr $\varrho(\overline{y}_n^m, \sup(y, \overline{y}_n^m)) \to 0$ für $n \to \infty$ $(m > n)$. ~~Wir haben~~ Hier bedeuten $\overline{y}_n^m = \sup(y_n, \ldots, y_m)$, $\overline{y}_n = \sup(y_n, \ldots)$

$$\varrho(\overline{y}_n, \sup(y, \overline{y}_n)) \leq \varrho(\overline{y}_n^m, \sup(y, \overline{y}_n)) \leq \varrho(\overline{y}_n^m, \sup(y, \overline{y}_n^m)) + \varrho(\sup(y, \overline{y}_n^m), \sup(y, \overline{y}_n))$$

Der ~~zweite~~ erste Summand rechts ist ~~klein~~ beliebig klein für grossen, der zweite ist kleiner als $\varrho(\overline{y}_n^m, \overline{y}_n)$ und ~~das ist auch~~ das konvergiert gegen Null für $m \to \infty$. Es ist also

$$\varrho(\overline{y}_n, \sup(y, \overline{y}_n)) \to 0;$$

andererseits ist diese Zahlenfolge monoton nicht [illegible] folglich $\varrho(\bar{y}_n, \sup(y, \bar{y}_n)) = 0$, $y \le \bar{y}_n$ und $y \le \lim y_n$. ~~Das ist~~ Diese Schlussweise ist auch für jede Teilfolge von $\{y_n\}$ anwendbar, also ist $y \le \underline{\varrho\lim}\, y_n$. Damit ist die erste Hälfte von (10) bewiesen.

Es sei jetzt $y_0 = \underline{U\lim^*}\, y_n$ ~~...~~. Wir zeigen, dass $\varrho(y_n, y_0) \to 0$, d.h. $y_0 \le \underline{\varrho\lim}\, y_n$. In der Tat: ~~wäre es n~~ im entgegengesetzten Falle hätten wir eine Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ mit $\varrho(y_{n_k}, y_0) \ge \varepsilon > 0$. Es gibt eine weitere Teilfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$, für welche $y_0 \le \lim\limits_{n \to \infty} y_{n_{k_i}} = z_0$. Dann ist

$$\varrho(y_{n_{k_i}}, y_0) = \varrho(y_{n_{k_i}}, \sup(y_0, y_{n_{k_i}})) \le \varrho(y_{n_{k_i}}, \sup(y_{n_{k_i}}, z_0)) \le$$

$$\le \varrho\Big(y_{n_{k_i}}, \inf_{n \ge m} y_n\Big) + \varrho\Big(\inf_{n \ge m} y_n, z_0\Big)$$

Das zweite Glied ist beliebig klein für grosse m, das erste gleich Null für festes m und genügend grosse i, also

$$\varrho(y_{n_{k_i}}, y_0) \to 0,$$

was einen Widerspruch ergibt.

Fallen der obere und untere metrische Limes zusammen, so heisst die Folge metrisch konvergent ~~mit~~ und

$$\varrho\lim y_n = \underline{\varrho\lim}\, y_n = \overline{\varrho\lim}\, y_n = y$$

ihr metrischer Limes. Mit anderen Worten, $\{y_n\}$ ~~ist~~ nennen wir dann und nur dann gegen y metrisch konvergent, wenn $\varrho(y, y_n) \to 0$, $\varrho(y_n, y) \to 0$.

In den Räumen des in §3 besprochenen Typus ~~fast~~ ist eine Folge $\{y_n\}$ dann und nur dann metrisch konvergent, wenn sie gegen ein <u>endliches</u> Element (*)-konvergent ist. In der Tat, mit Hilfe des Axioms 3° bekommt man

$$\rho(y_n, y) = \rho(y_n, \sup(y, y_n)) \geq \rho(\inf(y_n, y), \inf(y_n, \sup(y, y_n))) =$$

$$= \rho(\inf(y_n, y), y).$$

~~Die Folge $\{y_n\}$ ist dann und nur dann (*)-konvergent~~,
Ist also die Folge $\{y_n\}$ gegen y metrisch konvergent, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\inf(y_n, y), \sup(y_n, y)) = 0,$$

also nach Satz ~~lim~~ $y_n \to y\ (*)$. Das Umgekehrte folgt aus Satz und .

Ist der Raum Y kompakt, d.h. ~~ist~~ gilt das Axiom

VI ~~6~~. Aus jeder Folge $\{y_n\}$ lässt sich eine ~~Unter~~ konvergente Unterfolge mit einem endlichen Limes aussondern,

so fällt die metrische Konvergenz mit der oberen (*)-Konvergenz zusammen: $\rho\lim y_n = y$ bedeutet $\overline{o\lim}^{*} y_n = \underline{o\lim} y_n = y$.[16]

Es genügt zu zeigen: $\underline{\rho\lim y_n} = \underline{o\lim y_n}$. Es sei $\underline{o\lim y_n} = y$ aber $\rho(y_n, y)$ nicht gegen Null konvergent. Wir nehmen eine Unterfolge $\{y_{n_k}\}$, derart, dass $\rho(y_{n_k}, y) \geq \varepsilon > 0$. Nach VI gibt es eine konvergente Teilfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$. Da, wie man unschwer beweist, die metrische Funktion stetig ist, bekommen wir $\rho(\lim y_{n_{k_i}}, y) \geq$

---

16) Vgl. die ~~Bemerkung auf Seite~~ Fussnote 9).

Das ist aber ein Widerspruch, denn es ist $y \leq \lim y_{n_{k_i}}$.

Beispiel 1. Wir betrachten die ~~Menge~~ Gesamtheit Y aller abgeschlossenen nichtleeren Mengen y eines kompakten metrischen Raumes T. Führt man auf natürliche Weise die Beziehung $<$ ($y_1 < y_2$ bedeutet $y_1 \subset y_2$, $y_1 \neq y_2$) ~~und die übliche metrische Funktion~~ [1]), so ~~werden die~~ Axiome I–IV[2]), VIb (erste Hälfte), 1, 2, 3*, 4, 5*, 6* ~~sind~~ erfüllt, also ~~unsere~~ die Sätze ~~des § 4~~ dieses § anwendbar. Es ist hier aber die folgende Bedingung erfüllt:

$$\cancel{\rho(y, \sup(y_1, \dots, y_n)) \leq \sup_n} \quad \rho(y, \sup_{k \leq n} y_k) \leq \sup_{k \leq n} \rho(y, y_k),$$

also fallen hier $\overline{\rho\lim^*} y_n$ und $\overline{\rho\lim} y_n$ zusammen. Es ist also

$$\overline{\rho\lim} y_n = \overline{o\lim} y_n, \quad \underline{\rho\lim} y_n = \underline{o\lim} y_n.$$

Y nennen wir den Hausdorff'schen Raum des Raumes T.

Beispiel 2. Wir betrachten die Gesamtheit Y aller nach oben halbstetigen reelen Funktionen $x = y(t)$, die in einem kompakten metrischen Raume $T = \{t\}$ definiert sind. Die ~~Untermengen~~ Mengen

$$E_y = \mathop{\mathfrak{E}}_{(t,x)} [t \in T,\ x \leq y(t)],$$

~~als~~ die als Untermengen des Productraumes $T \times X$ (X – die Gerade) anzusehen sind, sind abgeschlossen.

$y_1 < y_2$ bedeute $y_1(t) \leq y_2(t)$ und nicht identisch gleich, d. h. $E_{y_1} \subset E_{y_2}$, $E_{y_1} \neq E_{y_2}$. ~~Damit~~ Dadurch wird Y zu einem halbgeordneten Raume, es gelten die Axiome I–IV, VIb (erste Hälfte). Wir seh

1). Vgl. z. B. Hausdorff, Mengenlehre, S. 145–150.

2). Vgl. ~~Anmerkung auf Seite~~ Fussnote 15).

~~ein~~ und die metrische Funktion

$$\rho(y_1, y_2) = \inf_{y_2 \subset \mathfrak{U}_\delta(y_1)} \delta \qquad (y_1 \leq y_2)$$

ein, wo $\mathfrak{U}_\delta(y_1)$ die δ-Umgebung der Menge y_1 ist, d.h. die Gesamtheit der Punkte, die einen Abstand $< \delta$ von der Menge y_1 haben, so erhalten ~~so~~ wir den halbgeordneten Raum, den wir Hausdorff'schen Raum[17] des Raumes T nennen werden. Die Axiome I–IV[18], Vb (erste Hälfte) sind sogar dann erfüllt, wenn T separabel (und nicht notwendig kompakt) ist. Nur IV bedarf eines Beweises. Es sei $E = \{y_\xi\}$, $\xi \in \Xi$. Hier ist $\sup E$ die abgeschlossene Hülle der Summe $\overline{\Sigma y_\xi}$, $\inf E$ der Durchschnitt Πy_ξ. Wir ~~wahl~~ wählen eine in $\overline{\Sigma y_\xi}$ überall dichte abzählbare Punktfolge, nehmen ~~wählen~~ die entsprechenden Mengen y_ξ, ~~ke~~ und erhalten auf diese Weise die Menge $E' = \{y_{\xi_n}\}$ $n = 1, 2, \ldots$ mit $\sup E' = \sup E$. Da in einem separablen Raume eine fallende ~~Folg~~ wohlgeordnete Folge von abgeschlossenen Mengen nur höchstens abzählbar sein kann, ist es möglich, eine ~~andere~~ Menge $E'' = \{y''_{\xi_n}\}$ so anzugeben, dass $\inf E'' = \inf E$ wird. Damit ist IV bewiesen. VI ist nur für kompakte T richtig[19].

Die Axiome 1°, 2°, 3*, 5* folgen fast unmittelbar aus der De-

---

17) ~~Sieh~~ Vgl. z.B. Alexandroff und Hopf, Topologie I, S.

18) Wegen des Axioms II vgl. die Fussnote 15); für zwei disjunkte abgeschlossene Mengen y_1, y_2 wird man $\inf(y_1, y_2) = -\infty$ setzen müssen

19) Eine konvergente Teilfolge kann man aus ~~[illegible]~~ einer gegebenen Folge für separable T aussondern (vgl. Alexandroff und Hopf, S.], aber ihr Limes kann auch $-\infty$ sein.

finition ~~...~~ der Funktion $\varrho(y_1, y_2)$ (sogar für beliebige beschränkte T); auch 4 kann für kompakte T unter Benutzung des Heine-Borel'schen Satzes leicht bewiesen werden.

Die obere Konvergenz von $\{y_n\}$ gegen y (d.h. $\overline{\text{olim}}\, y_n = \underline{\text{olim}}\, y_n = y$) ist mit

$$\prod_{n=1}^{\infty} \overline{\sum_{k=n}^{\infty} y_k} = \prod_{\{n_k\}} \overline{\sum_{k=1}^{\infty} y_{n_k}} = y$$

gleichbedeutend, also mit der topologischen Konvergenz der Folge $\{y_n\}$ gegen y [20]. Da für den Hausdorff'schen Raum ~~aussenden~~ die Bedingung

$$\varrho(y, \sup_{k \le n} y_k) \le \sup_{k \le n} \varrho(y, y_k)$$

erfüllt ist, fallen $\overline{\text{olim}}^{*} y_n$ und $\overline{\text{olim}}\, y_n$ zusammen. Es ist also

$$\overline{\text{plim}}\, y_n = \overline{\text{olim}}\, y_n, \quad \underline{\text{plim}}\, y_n = \underline{\text{olim}}\, y_n.$$

<u>Beispiel 2</u>. Wir betrachten die Gesamtheit Y aller nach oben halbstetigen reelen Funktionen $y(t)$, die in einem kompakten metrischen Raume $T = \{t\}$ definiert sind. ~~Die Mengen~~ Die Mengen

$$E_y = \mathop{\mathcal{E}}_{(t,x)} [t \in T, x \le y(t)],$$

die als Untermengen des Produktraumes $T \times \underline{X}$ anzusehen sind (X - die Gerade), sind abgeschlossen.

$y_1 < y_2$ bedeute soviel wie $y_1(t) \le y_2(t)$ und nich identisch gleich, oder, was dasselbe ist, $E_{y_1} \subset E_{y_2}$ und $E_{y_1} \ne E_{y_2}$. Dadurch wird Y zu einem halbgeordneten Raume, ~~Wie werden zeigen~~,

---

20) Vgl. Alexandroff und Hopf, S.

der ~~des~~ einer Untermenge des Hausdorff'schen Raumes für $T \times X$ ~~betrachtet werden~~ ~~[illegible]~~ isomorph ist, nämlich der Menge aller E_y. Die Axiome I-IV, V_6 (erste Hälfte) sind erfüllt, da sup und inf ~~[illegible]~~ von E_y-Mengen wieder solche Mengen sind.

Man kann in Y auch die metrische Funktion einführen. ~~Die S~~ Durch die Schränkungstranformation der Geraden X in die Strecke $(-1, +1)$ werden die Mengen E_y beschränkt, und man führe für diese Mengen, wie in Beispiel 1, die metrische Funktion, die dann als ~~die~~ eine metrische Funktion der ~~d~~ Elemente y betrachtet werden kann. Diese Funktion genügt den Axiomen 1, 2, 3*, 4, 5*.

Hätten wir für die Funktionen $y(t)$ auch die unendlichen Werte zugelassen, so würde Y sogar kompakt sein.

§5. Halbstetige Funktionen, deren Werte Elemente eines halbgeordneten Raumes sind.

In diesem Paragraphen werden wir stetige und halbstetige Funktionen $y = f(x)$ betrachten, die einen metrischen Raum $X = \{x\}$ in einen halbgeordneten (Axiome I–III) Raum $Y = \{y\}$ überführen. ~~Dabei sollen~~ Die Distanz zwischen zwei Punkten x und x' des Raumes X wird weiter mit (x, x') bezeichnet.

Wir nennen $f(x)$ im Punkte x_0 stetig, wenn für jede gegen das Element x_0 konvergierende Folge $\{x_n\}$ die Beziehung gilt $\lim f(x_n) = f(x_0)$. Ist im Raume Y eine metrische Funktion definiert (wie in §3, Bedingungen 1°–5°), so kann man die Stetigkeit im Punkte x_0 auch so ausdrücken: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass aus den Ungleichungen

$$(x_0, x_1) < \delta, \quad (x_0, x_2) < \delta, \quad \ldots, \quad (x_0, x_p) < \delta$$

folgt

$$\rho\left(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_p)\right) < \varepsilon.$$

Wir zeigen, dass $f(x)$ nicht stetig sein kann, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist (das Umgekehrte ist evident). Es ~~gibt~~ existiert unter dieser Voraussetzung ein bestimmtes $\varepsilon > 0$ und für jedes ganze k eine endliche Gruppe der Elemente $x_1^k, \ldots, x_{p_k}^k$, wobei

$$(x_0, x_1^k) < \tfrac{1}{k}, \quad \ldots, \quad (x_0, x_{p_k}^k) < \tfrac{1}{k} \quad ; \quad \rho\left(f(x_0), f(x_1^k), \ldots, f(x_{p_k}^k)\right) \geq \varepsilon.$$

Die Folge $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{p_1}^1, x_1^2, \ldots$ konvergiert offensichtlich gegen x_0, aber die Folge der zugehörigen Funktionenwerte konvergiert nicht gegen $f(x_0)$ (Vgl. §3, Satz).

Ist der Raum X kompakt, so ist die obenangeführte Bedingung sogar gleichmässig erfüllt, d.h. die ~~Funktion~~ $f(x)$ ist dann gleichmässig stetig

Es sei jetzt $y=f(x)$ eine beliebige Funktion (deren Werte auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein können), die X in Y überführt. Die obere Schranke von $f(x)$ im Punkte x_0 definieren wir durch die Gleichung

$$M(x_0) = M_f(x_0) = \inf_{r>0}\Big\{\sup_{(x,x')\le r} f(x)\Big\}.$$

Wir werden sagen, ~~dass~~ $f(x)$ sei im Punkte x_0 nach oben halbstetig, wenn $M_f(x_0)=f(x_0)$ ist. Eine in allen Punkten nach oben halbstetige Funktion nennen wir schlechthin nach oben halbstetig. Auf ähnliche Weise kann die untere Schranke einer Funktion und die nach unten ~~stet~~ halbstetigen Funktionen eingeführt werden. Wir beschränken uns aber im Weiteren meistenteils auf ~~mit~~ die ersten Klasse der halbstetigen Funktionen.

Es ist immer $f(x) \le M_f(x)$; Wir zeigen, dass $M_{M_f}(x)=M_f(x)$ ist; mit anderen Worten, $M_f(x)$ ist nach oben halbstetig. In der Tat:

$$M_{M_f}(x_0) = \inf_{r>0}\sup_{(x_0,x)\le r} M_f(x) \le \inf_{r>0}\sup_{(x_0,x)\le r}\sup_{(x,x')\le r} f(x') \le \inf_{r>0}\sup_{(x_0,x')\le 2r} f(x') = M_f(x_0).$$

Satz *) Sind die Funktionen $f_\xi(x)$, $\xi\in\Xi$ alle ~~nac~~ halbstetig nach oben, so ist auch $f(x)=\inf_{\xi\in\Xi} f_\xi(x)$ halbstetig nach oben.

Wir haben $M_f(x)\le M_{f_\xi}(x)=f_\xi(x)$ für alle ξ, also auch $M_f(x)\le f(x)$, woraus unsere Behauptung immittelbar folgt.

Um weiter zu gehen, werden wir zwei folgende Axiome

---

*) Die Sätze .... wurden in der Arbeit von L. Kantorovitch, . . .
. . . . C.R. de l'Acad. des Sc. de l'U.S.S.R, t.II, n°1 (1936) ohne Beweis mitgeteilt

nötig haben, denen der Raum Y genügen soll:

Axiom IV* (Eine Verschärfung von IV). Ist für die Mengen $E_n \subset Y$

$$\lim_{n\to\infty} [\sup E_n] = y,$$

so existieren endliche Untermengen E'_n dieser Mengen, $E'_n \subset E_n$ derart, dass

$$\lim_{n\to\infty} [\sup E'_n] = y.$$

wird. Diese Behauptung soll auch mit inf statt sup richtig sein

Axiom VII. Für zwei beliebige Elemente y_1, y_2, wobei $y_1 < y_2$ ist soll ein Element y_3 existieren, der zwischen y_1 und y_2 liegt: $y_1 < y_3 < y_2$.

Satz Für die Halbstetigkeit von $f(x)$ nach oben im Punkte x_0 ist notwendig und hinreichend, dass

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f(x_n) \leq f(x_0)$$

für jede Folge $\{x_n\}$, die gegen x_0 konvergiert.

Beweis. Es ist immer $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f(x_n) \leq M_f(x_0)$, also die Bedingung ist notwendig. Jetzt setzen wir voraus, dass unsere Bedingung erfüllt ist. Wir haben:

$$M_f(x_0) = \inf_{n\to\infty} \sup_{(x_0,x)\leq\frac{1}{n}} f(x).$$

Nach IV* kann man solche endliche Punktgruppen $x_1^n, \dots, x_{p_n}^n$ mit $(x_0, x_i^n) \leq \frac{1}{n}$ für $i = 1, 2, \dots, p_n$ wählen, dass

$$M_f(x_0) = \inf_n \sup_{i\leq p_n} f(x_i^n).$$

Bilden wir jetzt die Folge $x_1^1, \dots, x_{p_1}^1, x_1^2, \dots$ und bezeichnen ihre Elemente, der Reihenfolge nach, mit $\overline{x}_k$, $k = 1, 2, \dots$, so haben wir

~~$M_f(x_0) = in$~~

$$M_f(x_0) = \inf_n \sup_{i\leq p_n} f(x_i^n) \leq \inf_n \sup_{k\geq n} f(\overline{x}_k) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, f(\overline{x}_k) \leq f(x_0),$$

also die Funktion $f(x)$ ist wirklich nach oben halbstetig.

Auf ähnliche Weise können die nach unten halbstetigen Funktionen charakterisiert werden. Daraus ergibt sich: eine Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann ~~nach~~ stetig, wenn sie nach oben und nach unten halbstetig ist.

Aus Satz ... ergibt sich unmittelbar der folgende

<u>Satz</u>: Für eine nach oben halbstetige Funktion $f(x)$ ist die Menge $\underset{x}{E}[f(x) \geq y]$ ~~(...)~~ nach oben abgeschlossen.

<u>Satz</u>. Ist der Raum X kompakt, so ist jede endliche und nach oben halbstetige Funktion $f(x)$ nach oben beschränkt.

<u>Beweis</u>. Würde $f(x)$ nach oben nicht beschränkt sein, so könnte man nach IV eine Folge $\{x_n\}$ angeben (die man gegen ein bestimmtes x_0 konvergent voraussetzen kann) für welche $\sup_n f(x_n) = +\infty$ ist. Dann würde aber auch $f(x_0) = +\infty$ sein.

<u>Hilfssatz</u>. Ist der Raum Y separabel (als topologischer Raum, vgl. §1) und y_0, y_1 $(y_0 < y_1)$ zwei Elemente dieses Raumes, so existiert eine monoton wachsende, stetige Funktion $y(t)$, $0 \leq t \leq 1$, deren Werte im Raume Y liegen und für welche gilt $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$.

<u>Beweis</u>. Durch tranfinite Induktion kann man (mit Hilfe von VII) leicht eine Menge Y_0 angeben, die geordnet ist (d.h. alle ihre Elemente sind vergleichbar), nur aus Elementen, die $\geq y_0$ und $\leq y_1$ sind, besteht und in keiner grösseren Menge dieser Art enthalten ist. Nun ist bekannt *), dass ~~für~~

*) Vgl. z.B. Hausdorff, Mengenlehre, 2. Aufl., S. 52

in diesem Falle eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Elemente der Menge Y_0 und der Zahlen der Strecke $[0,1]$ existiert, bei der die Beziehung $<$ erhalten bleibt.

Auf diese Weise bekommen wir eine monoton wachsende Funktion $y = y(t)$; wir haben offenbar $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$. Diese Funktion ist stetig, denn aus ihrer Definition folgt, dass $t_n \to t$ mit $y(t_n) \to y(t)$ gleichbedeutend ist.

<u>Satz</u>. Sind die Räume X und Y separabel, so kann jede nach oben halbstetige Funktion $f(x)$ als ein Grenzwert einer abnehmenden Folge von stetigen Funktionen $\varphi_k(t)$ dargestellt werden.

<u>Beweis</u>. $\{x_n\}$ sei eine in X überall dichte Folge. Wir setzen

$$y_{n,i} = \sup_{(x_n, x) \leq \frac{1}{i}} f(x).$$

Dann können wir, unter Benutzung des Hilfssatzes, eine stetige und monoton ~~nicht abnehmende~~ wachsende Funktion $y_{n,i}(t)$, $0 \leq t \leq 1$ bilden, die im Intervall $[0, \frac{1}{i+1}]$ gleich $y_{n,i}$ ist, im Intervall $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$ von $y_{n,i}$ bis $+\infty$ wächst und für $t \geq \frac{1}{i}$ gleich $+\infty$ ist.

Die Funktionen

$$f_{n,i}(x) = y_{n,i}((x, x_n))$$

sind stetig und $\geq f(x)$. Wir bilden die ~~und~~ ebenfalls stetigen Funktionen

$$\varphi_K(x) = \inf_{n,i \leq K} \{f_{n,i}(x)\}$$

die auch ~~stets kleiner als grösser~~ $\geq f(x)$ sind und mit wachsendem $\underset{\sim}{K}$ abnehmen. Für jedes $\underset{\sim}{x}$ und jedes ganze $\underset{\sim}{i}$ kann man $n = n(i)$ so wählen, dass $(x, x_n) \leq \frac{1}{i+1}$ wird; daraus folgt

$$f_{n,i}(x) = y_{n,i} = \sup_{(x_n, x') \leq \frac{1}{i}} f(x') \leq \sup_{(x, x') \leq \frac{2}{i}} f(x')$$

und für genügend grosse K auch $\varphi_K(x) \leq \sup_{(x,x') \leq \frac{2}{i}} f(x')$.
Wir haben demzufolge $\lim_{K \to \infty} \varphi_K(x) \leq M_f(x) = f(x)$, also $\lim \varphi_K(x) = f(x)$ und unser Satz ist bewiesen.

<u>Satz</u> (Einschiebungssatz). Ist $f(x) \leq g(x)$, wo $f(x)$ eine nach oben halbstetige, $g(x)$ – eine nach nach unten halbstetige Funktion ist, so gibt es eine stetige Funktion $\varphi(x)$, die der Ungleichung genügt

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x).$$

Hier wird vorausgesetzt, dass der Raum Y ausser den bisher benutzten Axiomen auch noch V_6 erfüllt (stark distributiv ist).

<u>Beweis</u>. Nach Satz ... gibt es zwei Folgen stetiger Funktionen $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$, von denen die erste monoton abnehmend gegen $f(x)$ konvergiert, die zweite – monoton wachsend gegen $g(x)$.

Wir bilden die folgenden stetigen Funktionen

$$\varphi_1(x) = g_1(x) \quad ; \quad \varphi_2(x) = \sup(g_1(x), f(x)).$$

Allgemein sei gesetzt

$$\varphi_{2i-1}(x) = \inf(\varphi_{2i-2}(x), g_i(x)) \quad ; \quad \varphi_{2i}(x) = \sup(\varphi_{2i-1}(x), f_i(x)) \qquad (*)$$

Wir haben (hier und weiter werden ~~die A~~ zur Abkürzung die Argumente unter den Funktionszeichen weggelassen) $\varphi_{2i} \geq \varphi_{2i-1}$, $g_{i+1} \geq g_i \geq \varphi_{2i-1}$, also ist

$$\varphi_{2i+1} = \inf(\varphi_{2i}, g_{i+1}) \geq \varphi_{2i-1}$$

Ähnlich beweist man auch die Ungleichung $\varphi_{2i} \leq \varphi_{2i-2}$.

Wir bezeichnen $\lim_{i\to\infty} \varphi_{2i-1}(x) = \varphi_*(x)$, $\lim \varphi_{2i}(x) = \varphi^*(x)$. Offenbar ist $\varphi_*(x)$ nach unten, $\varphi^*(x)$ nach oben halbstetig. Durch Grenzübergang in $(*)$ erhalten wir

$$\varphi_* = \inf(\varphi^*, g) \quad ; \quad \varphi^* = \sup(\varphi_*, f).$$

Daraus folgt $\varphi^* \geq f$, aber auch $g \geq f$, also $\varphi_* \geq f$. Dann

$$\cancel{\varphi_* = \inf[\sup(\varphi_*, f), g] = \sup[\inf(\varphi_*, g), f]}$$

$$\cancel{\varphi^* \geq f}$$

erhalten wir $\varphi^* = \sup(\varphi_*, f) = \varphi_*$. Bezeichnet man die beiden zusammenfallenden Funktionen $\varphi_*(x)$ und $\varphi^*(x)$ mit $\varphi(x)$, so ist $\varphi(x)$ stetig und erfüllt die Ungleichung *)

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$$

Leningrad
Das Mathematische Institut der Universität.

*) Die hier benutzte Beweisform (Vgl. H. Hahn Reelle Funktionen. s. 252) kann auch in anderen Fällen von Nutzen sein; man vgl. z. B. die Arbeit von M. Javez, Classification des éléments d'un espace semiordonné, Berichte der Math. Ges. Charkow, Bd. $\underline{XV}_2$, 1938, S. 35–41, wo der Einschiebungssatz auf diese Weise ohne die Voraussetzung, der Raum sei eine Abel'sche Gruppe, bewiesen werden kann.

Bemerkung 2

Wir geben jetzt einige Beispiele von halbgeordneten Räumen an. Dort, wo es sich um Räume von Mengen handelt, soll ~~immer vorausgesetzt werden~~ $y_1 < y_2$ immer bedeuten: $y_1 \subset y_2$, aber $y_1 \neq y_2$.

Beispiel 1). Der Raum aller Untermengen y einer festen Menge A. Dann sind die Axiome I, II, III erfüllt, IV im Allgemeinen nicht. Da hier das Supremum – die logische Summe, das Infimum – den Durchschnitt der Mengen bedeutet, so ist unter den Distributivitäts-axiomen sogar das stärkste V_c erfüllt.

Beispiel 2). Der Raum aller konvexen Untermengen der Geraden (d.h. die Menge aller offenen, halboffenen und abgeschlossenen Intervalle).

Die Axiome I–IV sind erfüllt; Infimum ist der Durchschnitt, Supremum – die konvexe Hülle der Summe. Dagegen ist V_a nicht richtig: ist z.B.

$$y_1 = (0,1), \quad y_2 = (1,2) \quad y_3 = (2,3),$$

so wird

$$\sup(y_1, \inf(y_2, y_3)) = (0,1), \quad \inf(\sup(y_1, y_2), \sup(y_1, y_3)) = (0,2).$$

Beispiel 3). Der Raum Y besteht aus allen messbaren Untermengen des Intervalls $I = (0,1)$. Dabei sollen alle ~~unter~~ äquivalenten Mengen identifiziert ~~nicht unterschieden~~ werden.

Die Axiome I, II sind erfüllt. Supremum oder ~~und~~ Infimum einer endlichen oder abzählbaren Menge ist die Summe oder der Durchschnitt. Das Axiom III ist auch erfüllt: es sei $E = \{y_\xi\}$, $\xi \in \Xi$ eine beliebige Menge der Elemente $y_\xi \in Y$.

Wir betrachten alle endlichen Summen (n – beliebige ganze

m_0 sei die obere Grenze von ihrem Mass. Dann kann man eine solche wachsende Folge $z_1 \subset z_2 \subset \dots \subset z_n \subset \dots$ dieser Summen angeben, dass

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} z_n = m_0,$$

also $\operatorname{mes} z = m_0$, wo $z = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$ Nun enthält z alle y_ξ! Denn sonst würde es ein y_{ξ_0} geben mit $\operatorname{mes}(y_{\xi_0} + z) > m_0$, also $\operatorname{mes}(y_{\xi_0} + z_n) > m_0$ für grosse n, was der Definiton von m_0 widerspricht. Wir haben also $z = \sup E$.

IV ist auch mitbewiesen, denn setzt man

$$z_n = y_{\xi_1, n} + y_{\xi_2, n} + \dots + y_{\xi_{k_n}, n}$$

so ist $E' = \{y_{\xi_k, n}\}$ $k = 1, 2, \dots, k_n$; $n = 1, 2, \dots$ eine abzählbare Untermenge von E mit $\sup E' = \sup E = z$.

V_b ist hier erfüllt, V_c aber nicht; setzen wir

$$y_{t,1} = (0, t) \quad ; \quad y_{t,2} = (t, 1) \quad , \qquad E_t = \{y_{t,1}, y_{t,2}\} \quad 0 \le t \le 1$$

so ist

$$\inf_t \{\sup E_t\} = (0, 1) \neq \sup_{i(t)} [\inf \{y_{t, i(t)}\}] = 0 \qquad \{ i(t) = 1, 2.$$

Die Konvergenz ist hier die Konvergenz der Mengen fast überall, die $(*)$-Konvergenz – die Konvergenz nach dem Mass. Das folgt auch aus den Sätzen 9 und 10 von § 3.

Beispiel 4. Der Raum aller Untermengen von $(0, 1)$, wobei Elemente, die sich um eine höchstens abzählbare Menge von Punkten unterscheiden, identifiziert werden.

Die Axiome I, II sind erfüllt, III nur im Falle einer höchstens abzählbaren Menge E (und Supremum ist dann die Summe der Mengen). Für unabzählbare Mengen ist III falsch: ~~nimmt~~ zerlegt man ~~B~~ $(0,1)$ eine unabzählbare Menge $E = \{y_\xi\}$, $\xi \in \Xi$, von disjunkten Mengen y_ξ, so existiert $\sup E$ nicht.

$\boxed{\text{Bemerkung 2}}$ продолжение

~~) M besteht aus allen Punkten $y=(u, \ldots$~~

Das Axiom V_b ist erfüllt, IV und V_c sind sinnlos.

5) Y besteht aus allen Punkten $y=(u,v)$ des Quadrats $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$. Es soll ~~sein~~ $(u_1, v_1) < (u_2, v_2)$ dann und nur dann sein, wenn entweder $u_1 < u_2$, oder $u_1 = u_2$, $v_1 < v_2$ ist. Hier sind alle Axiome I-IV, V_c erfüllt.

Als weitere Beispiele kann man die linearen halbgeordneten Räume [7]) und die „Systeme von normierten Dingen" von V. Glivenko [8]) anführen.

---

7) Loc. cit. in Fussnote 1).

8) V. Glivenko, Géométrie des systèmes de choses normées, Am. Journ. of Math., vol. 58, pp. 799-828.

$\boxed{\text{Bemerkung 3}}$

Ist $y_n \to y$ (*), $z_n \to y$ (*), so folgt aus der Definition der (*)-Konvergenz, dass auch $u_k \to y$ (*), wo $\{u_k\}$ eine Folge ist, die aus verschiedenen Elementen der beiden ersten in beliebiger Reihenfolge besteht.

Die (*)-Konvergenz kann auch auf eine andere Art eingeführt werden. Wir machen Y zum topologischen Raume, indem wir eine Menge $E \subset Y$ abgeschlossen nennen, wenn alle Limes deren konvergenten Unterfolgen wieder der Menge E [illegible] induziert eine topologische Konvergenz: y_n konvergiert gegen y, wenn jede offene Umgebung von y fast alle y_n enthält.

Satz 2. Die eben definierte topologische Konvergenz ist mit der $(*)$-Konvergenz identisch[3)].

Es sei zuerst $y_n \to y$ $(*)$. Ist nicht $y_n \to y$ topologisch, so gibt es eine Umgebung U von y, die kein Element einer bestimmten Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ enthält. Für die abgeschlossene Menge $Y-U$ haben wir $y \bar{\in} Y-U$, $\{y_{n_k}\} \subset Y-U$, also kann keine Unterfolge von $\{y_{n_k}\}$ gegen y konvergieren, was unserer Voraussetzung $y_n \to y$ $(*)$ widerspricht.

Es sei jetzt $y_n \to y$ topologisch. Wir beweisen die Unmöglichkeit davon, dass y_n nicht gegen y $(*)$-konvergiert. ~~Hat die Folge~~ Man kann $y_n \neq y$ voraussetzen. Es gibt eine Folge $\{y_{n_k}\}$, deren keine Unterfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$ gegen y konvergiert. Hat die Folge $\{y_{n_k}\}$ überhaupt keine konvergenten Unterfolgen, so bildet sie eine abgeschlossene Menge, die y nicht enthält, was einen Widerspruch mit der Annahme bedeutet. Hat aber diese Folge konvergente Unterfolgen, so sei $y_{n_{k_i}} \to z$ $(z \neq y)$. Die Menge $\{y_{n_{k_i}}\} + (z)$ ist ~~eine~~ abgeschlossen ~~Menge~~ und enthält nicht y — das ist aber nicht möglich.

---

3) Vgl. F. Hausdorff, Gestufte Räume, Fund. Math. 25, S. ~~[illegible]~~ insbes. Satz IV.