Печатать. Н. Романов З.

ZUR ALLGEMEINEN THEORIE DER HALBGEORDNETEN RÄUME.

von

L.Kantorovitch und G.Lorentz /Leningrad/.

Diese Arbeit ist einer Untersuchung von allgemeinen halbgeordneten Raumen gewidmet, welche eine Verallgemeinerung der Theorie der linearen halbgeordneten Räume darstellen soll[1].

In § 1 werden Axiome und Grundbegriffe eingeführt. § 2 behandelt verschiedene Limesbildungen, die in einem halbgeordneten Raume eingeführt werden können und ihre Beziehungen zueinander. Weiter in § 3 untersuchen wir Räume mit metrischer Funktion. In § 4 wird eine allgemeinere Klasse von Räumen von diesem Typus behandelt. Als eine Anwendung geben wir in § 5 eine Theorie der halbstetigen Funktionen, deren Werte Elemente eines halbgeordneten Raumes sind.

§ 1. Axiome und Grundbegriffe.

Es sei in der Menge $Y = \{y\}$ für einige Paare von /verschiedenen/ Elementen y_1, y_2 die Beziehung "kleiner als": $y_1 < y_2$ definiert /diese Beziehung schreiben wir auch $y_2 > y_1$/.

Axiom I. Aus $y_1 < y_2$, $y_2 < y_3$ folgt $y_1 < y_3$.

Aus diesem Axiom folgt sogleich, dass die Beziehungen $y_1 < y_2$, $y_1 > y_2$, $y_1 = y_2$ einander widersprechen.

1/. Vgl. L.V.Kantorovitch, Lineare halbgeordnete Räume, Rec.Math.1937,Bd.2,N 1,S.121-168.,O.Ore,Annals of Math. 36, p.406-437.

Axiom II. Für zwei beliebige Elemente y_1, y_2 gibt es zwei andere y_3, y_4 derart, dass $y_3 \geqslant y_1, y_3 \geqslant y_2$; $y_4 \leqslant y_1$, $y_4 \leqslant y_2$ /wir schreiben $y_3 \geqslant y_1$, wenn entweder $y_3 > y_1$, oder $y_3 = y_1$ gilt/.

Eine Menge $E \subset Y$ heisst nach oben beschränkt und y_0 - ihre obere Grenze, wenn für alle $y \in E$ gilt $y \leqslant y_0$. Analog wird die untere Grenze einer Menge definiert.

Es ist, unter Benutzung des Axioms II, leicht zu zeigen, dass jede endliche Menge nach oben und nach unten beschränkt ist.

Gibt es unter allen oberen Grenzen einer nach oben beschränkten Menge E eine kleinste /sie ist dann offenbar eindeutig definiert/ so heisst sie das Supremum der Menge E, $\sup E = \sup_{y \in E} y$. Analog wird das Infimum der Menge E $\inf E$ als die grösste ihrer unteren Grenzen /wenn es eine solche gibt/ erklärt.

Axiom III. Für jede nach oben beschränkte Menge E existiert das Supremum $\sup E$.

Satz I. Für jede nach unten beschränkte Menge E existiert das Infimum $\inf E$.

Beweis. Wir betrachten die Menge E_1 aller unteren Grenzen von E. Diese Menge ist nach oben durch jedes Element y von E beschränkt und hat nach III ein Supremum $y_0 = \sup E_1$. Dieses y_0 ist offenbar das Infimum von E.

Ist eine Menge E nach oben /unten/ nicht beschränkt so schreiben wir $\sup E = +\infty$, bzw. $\inf E = -\infty$. $+\infty$ und $-\infty$ sollen dabei als ideale Elemente betrachtet werden mit $-\infty < y < +\infty$ für alle $y \in Y$. Diese Elemente werden nur dann eingeführt, wenn es in Y keinen grössten /kleinsten/ Element gibt.

Es gelten folgende leicht beweissbare Beziehungen.

a/. $\sup E \geqslant \inf E$

b/. $\sup E_1 \leqslant \sup E_2$, $\inf E_1 \geqslant \inf E_2$, wenn $E_1 \subset E_2$

c/. Ist $y_1 \leqslant y_2$ für alle y_1, y_2 mit $y_1 \in E_1$, $y_2 \in E_2$, so ist $\sup E_1 \leqslant \inf E_2$

d/. Für $E = \sum_{\xi \in \Xi} E_\xi$ gilt:

$$\sup E = \sup_{\xi \in \Xi} \{\sup E_\xi\} \quad \text{u.} \quad \inf E = \inf_{\xi \in \Xi} \{\inf E_\xi\}$$

e/. Ist $y_\xi \leqslant y'_\xi$ für alle $\xi \in \Xi$, so ist ~~sup y~~

~~sup y~~

~~inf y inf y'~~

$$\sup_{\xi \in \Xi} y_\xi \leqslant \sup_{\xi \in \Xi} y'_\xi \quad , \quad \inf_{\xi \in \Xi} y_\xi \leqslant \inf_{\xi \in \Xi} y'_\xi .$$

Wir führen jetzt den oberen und den unteren Grenzwert einer Folge $\{y_n\}$ /$\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$/ folgendermassen ein

$$\overline{\lim}\, y_n = \inf_n \left\{ \sup \left(y_n, y_{n+1}, \dots \right) \right\}$$

$$\underline{\lim}\, y_n = \sup_n \left\{ \inf \left(y_n, y_{n+1}, \dots \right) \right\}$$

Fallen sie zusammen und ist y_0 ihr gemeinsamer Wert, so nennen wir die Folge $\{y_n\}$ konvergent, und y_0 - den Grenzwert von y_n : $\lim y_n = y_0$

Es gilt

a/. Eine konstante Folge $\{y_n\}$, $y_n = y_0$ ist konvergent mit dem Grenzwert y_0.

b/. Ist $y_n \leq y_n'$, so ist $\overline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}\, y_n'$, $\underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\, y_n'$

c/. Eine monoton wachsende Folge $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_m \leq \dots$ konvergiert und ihr Grenzwert ist $\sup y_n$

d/. Ist $n_k \to \infty$, so ist $\overline{\lim_{k\to\infty}}\, y_{n_k} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$, $\underline{\lim_{k\to\infty}}\, y_{n_k} \geq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$

Wir beweisen nur d/. Es sei $\bar{n}_k = \inf /n_k, n_{k+1}, \dots/$, offenbar ist $\bar{n}_k \to \infty$ monoton. Dann ist:

$$\sup /y_{\bar{n}_k}, y_{\bar{n}_{k+1}} \dots/ \geq \sup /y_{n_k}, y_{n_{k+1}}, \dots/ \geq$$
$$\geq \inf /y_{n_k}, y_{n_{k+1}}, \dots/ \geq \inf (y_{\bar{n}_k}, y_{\bar{n}_{k+1}} \dots)$$

Es folgt daraus

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \geq \overline{\lim_{k\to\infty}}\, y_{n_k} \geq \underline{\lim_{k\to\infty}}\, y_{n_k} \geq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.

Im Raume Y werden wir noch eine andere Art von Konvergenz einführen. Die Folge $\{y_n\}$ heisst $/*/$-konvergent gegen y,

$$y_n \to y\ /*/\ , \quad \lim y_n = y\ /*/,$$

wenn es zu jeder Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ eine andere $\{y_{n_{k_i}}\}$ gibt, für welche ist $\lim y_{n_{k_i}} = y$.

Der Raum Y wird durch die $/*/$ Konvergenz zu einem Raum vom Typus L^* von Alexandroff-Urysohn[2].

Es gilt nämlich folgendes:

1°. Aus $y_n \to y\ /*/$ folgt $y_{n_k} \to y\ /*/$, $\{y_{n_k}\}$ eine Unterfolge von $\{y_n\}$

2°. Ist $y_n = y$ für alle n, so ist auch $y_n \to y\ /*/$.

3°. Ist $y_n \to y\ /*/$ nicht erfüllt, so gibt es eine solche Unterfolge $\{y_{n_k}\}$, dass für keine ihre Teilfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$ die Bedingung $y_{n_{k_i}} \to y\ (*)$ erfüllt ist.

Eines Beweises bedarf nur 3°. Hätte es keine solche Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ gegeben, so würden wir $y_n \to y\ /*/$ haben, entgegen der Voraussetzung.

Ist $y_n \to y\ /*/$, $z_n \to y\ /*/$, so folgt aus den Definition der $/*/$-Konvergenz, dass auch $u_k \to y\ /*/$, wo u_k eine Folge ist, die aus verschiedenen Elementen der beiden ersten in beliebiger Reihenfolge besteht.

Die $/*/$-Konvergenz kann auch auf eine andere Art eingeführt werden. Wir machen Y zum topologischen Raume, indem wir eine Menge $E \subset Y$ abgeschlossen nen-

---

2/. Vgl. K.Kuratowski, Topologie, I, S.76.

nen, wenn alle Limes ihrer konvergenten Unterfolgen wieder der Menge E angehören. Diese Topologie induziert eine topologische Konvergenz: y_n konvergiert gegen y, wenn jede offene Umgebung von y fast alle y_n enthält.

Satz 2. Die eben definierte topologische Konvergenz ist mit der /*/-Konvergenz identisch[3].

Es sei zuerst $y_n \to y$ /*/. Ist nicht $y_n \to y$ topologisch, so gibt es eine Umgebung U von y, die kein Element einer bestimmten Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ enthält. Für die abgeschlossene Menge $Y - U$, haben wir $y \in Y - U$, $\{y_{n_k}\} \subset Y - U$, also kann keine Unterfolge von y_{n_k} gegen y konvergieren, was unserer Voraussetzung $y_n \to y$ /*/ widerspricht.

Es sei jetzt $y_n \to y$ topologisch. Wir beweisen die Unmöglichkeit davon, dass y_n nicht gegen y /*/-konvergiert. Man kann $y_n \neq y$ voraussetzen. Es gibt eine Folge $\{y_{n_k}\}$, deren keine Unterfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$ gegen y konvergiert. Hat die Folge $\{y_{n_k}\}$ überhaupt keine konvergenten Unterfolgen, so bildet sie eine abgeschlossene Menge, die y nicht enthält, was einen Widerspruch mit der Annahme bedeutet. Hat aber diese Folge konvergente Unterfolgen, so sei $y_{n_{k_i}} \to z$ $/z \neq y/$. Die Menge $\{y_{n_{k_i}}\} + (z)$ ist abgeschlossen und enthält nicht y - das ist aber nicht möglich

Wir führen noch weitere Axiome ein.

Axiom IV. Für jede Menge $E \subset Y$ gibt es eine

3/. Vgl. F.Hausdorff, Gestufte Räume, Fund.Math.25, S.486-502, insbes. Satz IV.

abzählbare Teilmenge $E' \subset E$ derart, dass

$$\sup E' = \sup E \; ; \; \inf E' = \inf E \text{ [4/]}.$$

Axiom Va. $\sup [y_1, \inf /y_2, y_3/] = \inf [\sup (y_1, y_2), \sup (y_1, y_3)]$

Axiom Vb. $\sup \left(y, \inf_{K=1,2,\ldots} \{y_k\}\right) = \inf_{K=1,2,\ldots} \{\sup (y, y_k)\}$

$$\inf \left(y, \sup_{K=1,2,\ldots} \{y_k\}\right) = \sup_{K=1,2,\ldots} \{\inf (y, y_k)\}$$

wenn $\inf_k y_k$, bzw. $\sup_k y_k$ endlich sind.

Axiom Vc. $\sup_{\xi \in \Xi} \{\inf E_\xi\} = \inf_{\{y_\xi\}} \{\sup_{\xi \in \Xi} y_\xi\}$, $E_\xi \subset y$

$$\inf_{\xi \in \Xi} \{\sup E_\xi\} = \sup_{\{y_\xi\}} \{\inf_{\xi \in \Xi} y_\xi\}$$

wenn alle $\inf_\xi E_\xi$, bzw. $\sup_\xi E_\xi$ endlich sind. Das Infimum /bzw. Supremum/ in diesen Formeln rechts wird auf alle Mengen $\{y_\xi\}$, $\xi \in \Xi$ erstreckt, für welche bei jedem $\xi \in \Xi$ y_ξ der Menge E_ξ angehört.

Aus Va folgt das duale dazu und sogar Vc für endliche Ξ, E_ξ [5/]. Aus Vb folgt leicht Vc für endliche Ξ, abzählbare E_ξ. Ist Va erfüllt, so nennen wir den Raum y distributiv, im Falle Vb nennen wir ihn stark distributiv [6/].

Wir geben jetzt einige Beispiele von halbgeordneten Räumen an. Dort, wo es sich um Räume von Mengen

---

4/. Das Axiom ist auch dann erfüllt, wenn es zwei abzählbare Teilmengen E', E'' von E gibt mit $\sup E' = \sup E$, $\inf E'' = \inf E$.

5/. Vgl. z.B. Ore, loc.cit.

6/. Im Weiteren wird immer angegeben, welches von den Axiomen V als gültig vorausgesetzt wird.

handelt, soll $y_1 < y_2$ immer bedeuten: $y_1 \subset y_2$, aber $y_1 \neq y_2$.

Beispiel 1. Der Raum aller Untermengen y einer festen Menge A. Dann sind die Axiome I, II, III erfüllt, IV im Allgemeinen nicht. Da hier das Supremum - die logische Summe, das Infimum - den Durchschnitt der Mengen bedeutet, so ist unter den Distributivitätsaxiomen sogar das stärkste Vc erfüllt.

Beispiel 2. Der Raum aller konvexen Untermengen der Geraden /d.h. die Menge aller offenen, halboffenen und abgeschlossenen Intervalle/.

Die Axiome I-IV sind erfüllt; Infimum ist der Durchschnitt, Supremum - die konvexe Hülle der Summe. Dagegen ist Va nicht richtig: ist z.B.

$$y_1 = /0,1/,\ y_2 = /1,2/ \quad y_3 = /2,3/,$$

so wird

$$\sup\left[y_1, \inf /y_2, y_3/\right] = /0,1/,\ \inf\left[\sup /y_1, y_2/, \sup /y_1, y_3/\right] = /0,2/.$$

Beispiel 3. Der Raum y besteht aus allen messbaren Untermengen des Intervalls $I = /0,1/$. Dabei sollen alle äquivalenten Mengen identifitiert werden.

Die Axiome I, II sind erfüllt; Supremum oder Infimum einer endlichen oder abzählbaren Menge ist die Summe oder der Durchschnitt. Das Axiom III ist auch erfüllt: es sei $E = \{y_\xi\}$, $\xi \in \Xi$ eine beliebige Menge der Elemente $y_\xi \in y$.

Wir betrachten alle endlichen Sümmen (n-beliebige ganze Zahl):

$$y_{\xi_1} + y_{\xi_2} + \ldots + y_{\xi_n} \quad ;$$

m_0 sei der obere Grenze von ihrem Mass. Dann kann man eine solche wachsende Folge $z_1 \subset z_2 \subset \ldots \subset z_n \subset \ldots$ dieser Summen angeben, dass

$$\lim_{n \to \infty} \text{mes } z_n = m_0,$$

also mes $z = m_0$, wo $z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$ Nun enthält z alle y_ξ! Denn sonst würde es ein y_0 geben mit mes $/y + z/ > m_0$ also mes $/y + z_n/ > m_0$ für grosse n, was der Definition von m_0 widerspricht. Wir haben also $z = \sup E$.

IV ist auch mitbewiesen, denn setzt man

$$z_n = y_{\xi_1, n} + y_{\xi_2, n} + \ldots + y_{\xi_{k_n}, n}$$

so ist $E' = \{y_{\xi_k, n}\}$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$, $n = 1, 2, \ldots$ eine abzählbare Untermenge von E mit $\sup E' = \sup E = z$.

V6 ist hier erfüllt, Vc aber nicht; setzen wir

$$y_{t,1} = /0, t/ \; ; \; y_{t,2} = /t, 1/; \quad E_t = \{y_{t,1}, y_{t,2}\}, 0 \leq t \leq 1$$

so ist

$$\inf_t \{\sup E_t\} = /0, 1/ \neq \sup_{i(t)} \left[\inf_t \{y_{t, i(t)}\}\right] = 0$$
$$i(t) = 1, 2.$$

Die Konvergenz ist hier die Konvergenz der Mengen fast überall, die /*/-Konvergenz - die Konvergenz nach dem Mass. Das folgt auch aus den Sätzen 9 und 10 von § 3.

Beispiel 4. Der Raum aller Untermengen von /0,1/ wobei Elemente, die sich um eine höchstens abzählbare Menge von Punkten unterscheiden, identifitiert werden.

Die Axiome I, II sind erfüllt, III nur im Falle einer höchstens abzählbaren Menge E /und Supremum ist dann die Summe der Mengen/. Für unabzählbare

Mengen ist III falsch: zerlegt man /0,1/ in eine unabzählbare Menge $E = \{y_\xi\}$, $\xi \in \Xi$, von disjunkten Mengen y_ξ, so existiert sup E nicht.

Das Axiom V_b ist erfüllt, IV und V_c sind sinnlos.

Beispiel 5. Y besteht aus allen Punkten $y = /u,v/$ des Quadrats $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. Es soll $/u_1 v_1/ < /u_2, v_2/$ dann und nur dann sein, wenn entweder $u_1 < u_2$, oder $u_1 = u_2$, $v_1 < v_2$ ist. Hier sind alle Axiome I-IV, V_c erfüllt.

Als weitere Beispiele kann man die linearen halbgeordneten Räume[7] und die "Systeme von normierten Dingen" von V. Glivenko[8] anführen.

§ 2. Limesbildungen.

Wir führen folgende Limesbildungen einer Folge $\{y_n\}$ ein: Den grössten oberen Limes

$$\overline{o\lim}\, y_n = \inf_n \{\sup(y_n, y_{n+1}, \ldots)\} = \overline{\lim}\, y_n$$

Den kleinsten oberen Limes

$$\underline{o\lim}\, y_n = \inf_{\{n_k\}} \{\sup_k \{y_{n_k}\}\}$$ /das Infimum wird auf alle Teilfolgen von $\{y_n\}$ erstreckt/.

Den grössten oberen /*/ Limes $\overline{o\lim}^*\, y_n$ erklären wir als den kleinsten Element y, der die folgende Eigenschaft besitzt: zu jeder Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ gibt es eine weitere Unterfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$ derart,

---

7/. Loc. cit. in Fussnote 1/.

8/. V. Glivenko, Géométrie des systèmes de choses normées. Am. Journ. of Math., vol. 58, pp. 799-828; Contribution à l'étude des systèmes de choses normées, Amer. J. Math, vol. 59, pp. 941-951.

dass $y \geqslant \overline{\text{o lim}}_{i\to\infty} y_{n_{k_i}}$

Es können endlich duale Limes zu diesen betrachtet werden: der kleinste untere Limes, $\underline{\text{u lim}}\, y_n = \underline{\lim}\, y_n$, der grösste untere $\overline{\text{u lim}}\, y_n$, und der kleinste untere /*/-Limes $\underline{\text{u lim}}^{*}\, y_n$.

Wir zeigen jetzt, dass die definierten /*/-Limes wirklich existieren. Nach IV können wir eine solche Folge $\{y^{(k)}\}$ angeben, die aus Elementen besteht die die Eigenschaft /A/ besitzen, dass $y_0 = \inf\{y^{(k)}\}$ gleich dem Infimum aller solcher y ist. Nehmen wir eine beliebige Teilfolge $\{y_{n_k}\}$, so gibt es eine Unterfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$, für welche $y^{(1)} \geqslant \overline{\lim}_{i\to\infty} y_{n_{k_i}}$; aus dieser kann man eine weitere Unterfolge $\{y_{n_{k_{i_j}}}\}$ herausgreifen für welche $y^{(2)} \geqslant \overline{\lim}_{j\to\infty} y_{n_{k_{i_j}}}$ u.s.w. Für eine Diagonalfolge $\{y_{\bar{n}_i}\}$ von allen diesen Unterfolgen haben wir

$$y^{(k)} \geqslant \overline{\lim}_{i\to\infty} y_{\bar{n}_i}$$

für alle k, also auch

$$y_0 \geqslant \overline{\lim}_{i\to\infty} y_{\bar{n}_i}$$

y_0 hat also die Eigenschaft /A/, w.z.b.w.

Für den kleinsten oberen Limes kann man auch schreiben:

$$\underline{\text{o lim}}\, y_n = \inf_{\{n_k\}} \left\{\overline{\lim}\, y_{n_k}\right\}^{9/} \qquad /1/$$

9/. Einen kleinsten oberen /*/-Limes nach diesem Analogon einzuführen: $\underline{\text{o lim}}^{*}\, y_n = \inf_{\{n_k\}} \left\{\overline{\text{o lim}}^{*}\, y_{n_k}\right\}$ hat es keinen Sinn, denn dieses fällt zusammen mit $\underline{\text{o lim}}\, y_n$, wie man leicht zeigt. Wir werden deshalb $\overline{\text{o lim}}^{*}\, y_n$, $\underline{\text{u lim}}^{*}\, y_n$ auch so schreiben: $\overline{\lim}^{*}\, y_n$, $\underline{\lim}^{*}\, y_n$.

Es ist nämlich

$$\inf_{\{n_k\}}\{\overline{\lim}\, y_{n_k}\} = \inf_{\{n_k\}}\left\{\inf_k\left[\sup\left(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}, \dots\right)\right]\right\} =$$

$$= \inf_{n_k, n_{k+1}, \dots}\left[\sup\left(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}, \dots\right)\right] = \inf_{\{m_k\}}\{\sup_k y_{m_k}\}$$

Für die Limes gelten folgende Ungleichungen:

$$\overline{o\lim}\, y_n \geq \overline{o\lim}^{*}\, y_n \geq \overline{U\lim}\, y_n \geq \underline{U\lim}^{*}\, y_n \geq \underline{U\lim}\, y_n \qquad /2/$$

$$\overline{o\lim}\, y_n \geq \overline{o\lim}^{*}\, y_n \geq \underline{o\lim}\, y_n \geq \underline{U\lim}^{*}\, y_n \geq \underline{U\lim}\, y_n$$

Ist aber das Axiom Vc erfüllt, so fallen alle grössten /und alle kleinsten/ Limes zusammen:

$$\overline{o\lim}\, y_n = \inf_n\{\sup(y_n, y_{n+1}, \dots)\} = \sup_{\{n_k\}}\{\inf_k y_{n_k}\} = \overline{U\lim}\, y_n$$

Satz 3. Damit eine Folge $\{y_n\}$ /*/-konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\overline{o\lim}^{*}\, y_n = \underline{U\lim}^{*}\, y_n \qquad /3/.$$

$\lim^{*} y_n$ ist dann diesen beiden Limes gleich.

Beweis. Es sei die Folge $\{y_n\}$ /*/-konvergent und $\lim^{*} y_n = y$. Das Element y erfüllt offenbar die Bedingung /A/, es ist also $y \geq \overline{o\lim}^{*}\, y_n$. Ähnlich wird $y \leq \underline{U\lim}^{*}\, y_n$ bewiesen, was mit /2/ zusammen /3/ ergibt.

Umgekehrt, sei /3/ erfüllt und $y = \overline{o\lim}^{*}\, y_n$. Zu jeder Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ gibt es dann eine weitere Teilfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$, für welche $y \geq \overline{\lim_i}\, y_{n_{k_i}}$. Nach /3/ und der Definition des unteren /*/-Limes lässt sich eine andere Teilfolge $\{y_{n_{k_{i_j}}}\}$ aussondern, für welche gilt

$$y \leq \underline{\lim_j}\, y_{n_{k_{i_j}}}$$

Es ist also

$$y = \lim_j\, y_{n_{k_{i_j}}},$$

und wir haben $y_n \to y$ /*/ bewiesen.

In der folgenden Sätzen wird das Axiom Vb benutzt.

Satz 4. Der obere Limes $\overline{y} = \overline{\lim}\, y_n$ ist das kleinste y, für das gilt:

$$\sup /y, y_n/ \longrightarrow y \qquad /4/$$

Beweis. Ist $\overline{y} = -\infty$, so ist unsere Behauptung offenbar richtig. Wir dürfen also $\overline{y} > -\infty$, voraussetzen.

Bezeichnen wir $\overline{y}_k = \sup /y_k, y_{k+1}, \ldots/$. Die Bedingung /4/ ist mit der folgenden gleichbedeutend:

$$y = \overline{\lim_n} \left[\sup /y, y_n/\right] ,$$

dass heisst

$$y = \inf_k \left[\sup /y, y_k, y_{k+1}, \ldots/\right] = \inf_k \left\{\sup\left(y, \overline{y}_k\right)\right\} =$$
$$= \sup \left(y, \inf_k \overline{y}_k\right) = \sup /y, \overline{y}/ ,$$

oder $y \geqslant \overline{y}$

Satz 5. Der obere /*/-Limes $\overline{y}^* = \overline{\lim}^*\, y_n$ ist das kleinste Element y, für welches gilt

$$\sup /y, y_n/ \longrightarrow y \ /*/ \qquad /5/$$

In der Tat, diese Bedingung ist damit gleichbedeutend, dass aus jeder Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ eine weitere $\{y_{n_{k_i}}\}$ sich aussondern lässt, für welche gilt

$$\sup /y, y_{n_{k_i}}/ \longrightarrow y,$$

dass heisst

$$y \geqslant \overline{\lim}\, y_{n_{k_i}}$$

Nach der Definition des oberen /*/-Limes bedeutet also /5/

$$y \geqslant \overline{\lim}^*\, y_n , \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Satz 6. Es gilt

a/ $\underline{\lim}_n \{\sup /y_n, y'_n/\} \geq \sup /\underline{\lim}_n y_n, \underline{\lim} y'_n/$

b/ $\overline{\lim}_n \{\sup /y_n, y'_n/\} = \sup /\overline{\lim} y_n, \overline{\lim} y'_n/$

Es gelten die Formeln $a^{*/}$, $b^{*/}$, wo lim durch $\lim^*$ ersetzt ist und endlich duale zu den vier angegebenen /$\overline{\lim}$ mit $\underline{\lim}$ zu ersetzen und sup mit inf/.

Beweis. a/ und $a^{*/}$ sind evident; wir beweisen nur b/ und $b^{*/}$. Im weiteren setzen wir $\overline{y}_n = \sup /y_n, y_{n+1}, \ldots/$, $\overline{y}'_n = \sup (y'_n, y'_{n+1}, \ldots)$

b/ $\overline{\lim} \{\sup /y_n, y'_n/\} \leq \overline{\lim} \{\sup /\overline{y}_n, \overline{y}'_n/\} = \inf_n$

$= \inf_n \{\sup /\overline{y}_n, \overline{y}'_n/\} = \inf_{n,m} \{\sup /\overline{y}_n, \overline{y}'_m/\} =$

$= \sup (\inf_n \overline{y}_n, \inf_m \overline{y}'_m) = \sup (\overline{\lim} y_n, \overline{\lim} y'_m/$

Die umgekehrte Ungleichung ist aber trivial.

$b^{*/}$. Es ist $[\overline{\lim}^* \{\sup /y_n, y'_n/\} \geq \sup /\overline{\lim}^* y_n, \overline{\lim}^* y'_n/ = y_0$ /6/

Aus der Definition des oberen ($*$)-Limes folgt, dass es zu jeder Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ eine weitere, $\{y_{n_{k_i}}\}$ gibt, für welche gleichzeitig

$$y_0 \geq \overline{\lim}_i y_{n_{k_i}}, \quad y_0 \geq \overline{\lim}_i y'_{n_{k_i}}$$

Daraus ergibt sich nach b/

$$y_0 \geq \sup /\overline{\lim} y_{n_{k_i}}, \overline{\lim} y'_{n_{k_i}}/ = \overline{\lim}_i [\sup /y_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}/],$$

und wenn man alles zusammenfasst,

$$y_0 \geq \overline{\lim}^* [\sup /y_n, y'_n/] .$$

Mit /6/ zusammen ergibt das b)*.

Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass sup und inf inbezug auf die gewöhnliche und die /*/-Konvergenz stetig sind: aus $y_n \to y$, $y'_n \to y'$ folgt $\sup /y_n, y'_n/ \to \sup /y, y'/$, $\inf /y_n, y'_n/ \to \inf /y, y'/$ u.s.w.

§ 3. Räume mit metrischer Funktion.

Wir betrachten jetzt einen Raum $Y = \{y\}$, in dem die Axiome I-III[10/] und Va erfüllt sind. Es sei für jedes Paar von vergleichbaren Elementen, y_1, y_2 $/y_1 \leq y_2/$ die nichtnegative Funktion $\rho/y_1, y_2/$ definiert, die wir als metrische Funktion des Raumes Y bezeichnen und die folgenden Bedingungen erfüllen soll

1°. $\rho/y_1, y_2/ = 0$ ist mit $y_1 = y_2$ gleichbedeutend

2°. $\rho/y_1, y_2/ + \rho/y_2, y_3/ \geq \rho/y_1, y_3/ \quad /y_1 \leq y_2 \leq y_3/$

3°. $\rho/y_1, y_2/ \geq \rho/\sup/y, y_1/, \sup/y, y_2//$

$\rho/y_1, y_2/ \geq \rho/\inf/y, y_1/, \inf/y, y_2//$

4°. Konvergiert y_n monoton gegen y, so ist $\rho/y, y_n/ \to 0$ [bzw. $\rho/y_n, y/ \to 0$].

5°. Für keine monoton gegen $+\infty$ oder $-\infty$ konvergierende Folge $\{y_n\}$ soll sein

$$\lim_{n,m \to \infty} \rho/y_n, y_m/ = 0.$$

10/. Es genügt, das Axiom III nur für abzählbare E geltend vorauszusetzen.

Spezialfälle solcher Räume sind z.B. die linearen halbgeordneten Räume mit metrischen Funktion 11/, oder ihre Untermengen.

Wir setzen allgemein

$$\rho/y_1,y_2,\dots,y_n/ = \rho/\inf/y_1,\dots,y_n/,\ \sup/y_1,\dots,y_n//$$

Dann wird 1°, 3° für beliebige y_1,y_2 richtig. Es ist z.B.

$$\rho/y_1,y_2/ = \rho(\inf/y_1,y_2/,\ \sup/y_1,y_2/) \geqslant$$
$$\geqslant \rho/\sup/y,\inf/y_1,y_2//,\ \sup/y,\sup/y_1,y_2///=$$
$$=\rho/\inf/y_1',y_2'/,\ \sup/y_1',y_2'//= \rho/y_1',y_2'/,$$

wo $y_1' = \sup/y,y_1/$, $y_2' = \sup/y,y_2/$ gesetzt wurde.

Aus 3° folgt für $y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3$:

$$\rho/y_1,y_2/ \leqslant \rho/y_1,y_3/;\quad \rho/y_2,y_3/ \leqslant \rho/y_1,y_3/ \qquad /1/$$

Die Dreieckungleichung gilt im allgemeinen nicht; als ein Ersatz dafür kann die Ungleichung dienen

$$\rho/y_1,y_2/ + \rho/y_2,y_3/ + \dots + \rho/y_{n-1},y_n/ \geqslant$$
$$\geqslant \rho/\inf/y_1,y_2/,\ \sup/y_1,y_2// + \rho/\sup/y_1,\inf/y_2,y_3/,$$
$$\sup/y_1,\ \sup/y_2,y_3///+ \dots + \rho/\sup/y_1,y_2,\dots$$
$$,y_{n-2},\inf/y_{n-1},y_n//,\sup/y_1,\dots,y_{n-2},\sup/y_{n-1},y_n//$$
$$\geqslant \rho/\inf/y_1,y_2/,\ \sup/y_1,y_2,\dots,y_n//$$

/Wir benutzten 3°, /1/ und Folgerung aus Axiom Va/.

Ebenso ist $\rho/y_1,y_2/ + \dots + \rho/y_{n-1},y_n/ \geqslant$
$\geqslant \rho/\inf/y_1,y_2,\dots,y_n/,\ \sup/y_1,y_2//$

und es folgt

$$\rho/y_1,y_2,\dots,y_n/ \leqslant 2\rho/y_1,y_2/ + \dots + 2\rho/y_{n-1},y_n/ \qquad /2/$$

Für $n = 3$ haben wir

11/. Vgl. Kantorovitch, loc.cit., § 8.

$$\rho/y_1,y_2,y_3/ \leq \rho/\inf/y_1,y_2,y_3/,\ \inf/y_1,y_2/\}/ + \rho/\inf(y_1,y_2),\sup/y_1,y_2,y_3//\leq \rho/y_1,y_2/ + 2\rho/y_2,y_3/ \qquad /3/$$

Umsomehr ist

$$\rho/y_1,y_3/ \leq \rho/y_1,y_2/ + 2\rho/y_2,y_3/$$

und daraus folgt leicht

$$\left|\rho/y_1,y_2/ - \rho/y_1,y_3/\right| \leq 2\rho/y_2,y_3/ \qquad /4/$$

Als Verallgemeinerung haben wir

$$\left|\rho/y_1,y_2/ - \rho/z_1,z_2/\right| \leq \left|\rho/y_1,y_2/ - \rho/y_1,z_2/\right| + \left|\rho/y_1,z_2/ - \rho/z_1,z_2/\right| \leq 2\rho/y_2,z_2/ + 2\rho/y_1,z_1/$$

Setzen wir $i = \inf/y_1,y_2,\ldots,y_n/$, $s = \sup/y_1,y_2,\ldots,y_n/$, so wird

$$\left|\rho/y_1,y_2,\ldots,y_n,y/ - \rho/y_1,y_2,\ldots y_n,z/\right| = \left|\rho/\inf/i,y/,\sup/s,y//- \rho/\inf/i,z/,\sup/s,z//\right| \leq$$
$$\leq 2\rho/y,z/ + 2\rho/y,z/ = 4\rho/y,z/$$

Daraus folgt leicht

$$\left|\rho/y_1,y_2,\ldots,y_n/ - \rho/z_1,z_2,\ldots,z_n/\right| \leq 4\rho/y_1,z_1/ + \ldots + 4\rho/y_n,z_n/ \qquad /5/$$

Endlich führen wir die folgenden Ungleichungen an:

$$\rho/\sup/y_1,z_1/,\sup/y_2,z_2/,\ldots,\sup/y_n,z_n// \leq \rho/y_1,\ldots,y_n/ + \rho/z_1,\ldots,z_n/$$
$$\rho/\inf/y_1,z_1/,\ldots,\inf/y_n,z_n// \leq \rho/y_1,\ldots y_n/ + \rho/z_1,\ldots,z_n/ \qquad /6/$$

Es werde z.B. die erste Ungleichung bewiesen:

$$\rho/\sup/y_1,z_1/,\dots,\sup/y_n,z_n//=\rho/\inf/\sup/y_1,z_1/,\dots,\sup/y_n,z_n//,\ \sup/y_1,\dots,y_n,z_1,\dots z_n//\leq$$
$$\leq\rho/\inf/\sup/y_1,z_1/,\dots,\sup/y_n,z_n//,\ \sup/y_1,\dots,y_n,\inf/z_1,\dots,z_n///+\rho/\sup/y_1,\dots,y_n,\inf/z_1,\ ,z_n//,\ \sup/y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_n//$$

Diese letzte Ungleichung folgt aus 3^0, denn wir haben

$$\sup/y_1,\dots,y_n,\inf/z_1,\ ,z_n//=\inf_k/\sup/y_1,\dots,y_n,z_k//\geq\inf_k/\sup/y_k,z_k//$$

Es folgt weiter

$$\rho/\sup/y_1,z_1/,\dots,\sup/y_n,z_n//\leq\rho/\sup/\inf/y_1,\dots,y_n/,\ \inf/z_1,\dots,z_n//,\ \sup/\sup/y_1,\dots,y_n/,\inf/z_1,\dots,z_n///+$$
$$\rho/\inf/z_1,\ ,z_n/,\ \sup/z_1,\ ,z_n//\leq\rho/y_1,\dots,y_n/+\dots,\rho/z_1,\dots,z_n/\ \text{w.z.b.w.}$$

<u>Satz 7.</u> $\rho/y_1,y_2,\dots,y_n/$ ist eine stetige Funktion von $y_1,y_n,\dots,y_n$.

<u>Beweis.</u> Wir zeigen zunächst, dass aus $y^{(k)}\to y$ $\rho(y^{(k)},y)\to 0$ folgt. Es sei $\tilde{y}^{(k)}=\inf_{n\geq k}y^{(n)}$, $\bar{y}^{(k)}=\sup_{n\geq k}y^{(n)}$. Dann streben $\tilde{y}^{(k)}$, $\bar{y}^{(k)}$ monoton gegen y und deshalb ist nach 4^0,

$$\rho(\tilde{y}^{(k)},\bar{y}^{(k)})\leq\rho(\tilde{y}^{(k)},y)+\rho(y,\bar{y}^{k})\to 0.$$

Da y und $y^{(k)}$ zwischen $\tilde{y}^{(k)}$ und $\bar{y}^{(k)}$ liegen, ist umsomehr

$$\rho(y^{(k)},y)\to 0.$$

Nun sei $y_i^{(k)}\to y_i$, $i=1,2,\dots,n$. Dann ist nach /5/

$$|\rho/y_i^{(k)},\dots,y_n^{(k)}/-\rho/y_1,\dots,y_n/|\leq 4\,\rho/y_1^{(k)},y_1/+\dots+4\,\rho/y_n^{(k)},y_n/\to 0,\ \text{w.z.b.w.}$$

Bemerkung. Wie man sich leicht überzeugt, ist unsere Behauptung auch in Bezug auf die $/\ast/$-Konvergenz richtig.

Satz 8. Damit die Folge $\{y_n\}$ gegen ein endliches Element konvergiere, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}) = 0 \qquad /7/$$

Beweis. Ist die Folge gegen y konvergent, und $\tilde{y}_n$, $\bar{y}_n$ ähnlich wie in Satz 7 definiert, so ist nach 4° $\rho(\tilde{y}_n, y) \to 0$, $\rho/\bar{y}_n, y/ \to 0$.

Es ist aber

$$\rho/y_n, \ldots, y_{n+p}, y/ \leq \rho/\tilde{y}_n, \bar{y}_n/ \to \rho/y, y/ = 0$$

also sogar mehr, was nötig war.

Es sei jetzt die Bedingung /7/ erfüllt. Wir setzen

$$\bar{y}_n^{(m)} = \sup/y_n, \ldots, y_m/ \qquad /m > n/$$

Es ist

$$\rho/\bar{y}_n^{(m)}, \bar{y}_n^{(m+p)}/ = \rho/\sup/y_n, \ldots, y_m/, \sup/y_n, \ldots, y_{m+p}// \leq$$
$$\leq \rho/y_m, \sup/y_m, \ldots, y_{m+p}// \leq \rho/y_m, \ldots, y_{m+p}/ \to 0$$

für $m \to \infty$.

Nach Axiom 5° ist also die monotone Folge $\bar{y}_n^m$ gegen ein endliches Element $\bar{y}_n$ konvergent. Ebenso ist endlich

$$\tilde{y}_n = \inf/y_n, y_{n+1}, \ldots/$$

Es folgt daraus, dass auch die Elemente $\sup \tilde{y}_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n = y_\ast$, $\lim_{n\to\infty} \bar{y}_n = \inf \bar{y}_n = y^\ast$, $y_\ast \leq y^\ast$ endlich sind. Wir haben nach Satz 7.

$$\rho/\tilde{y}_n, \bar{y}_n/ = \lim_{m\to\infty} \rho/y_n, y_{n+1}, \ldots, y_m/$$
$$\rho/y_\ast, y^\ast/ = \inf_n \rho/\tilde{y}_n, \bar{y}_n/ = 0,$$

also $y_\ast = y^\ast$, w.z.b.w.

Satz 9. Damit die Folge $\{y_n\}$ gegen das Element y

konvergiere, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\lim_{n\to\infty} /y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}, y/ = 0.$$

Beweis. Die Notwendigkeit wurde oben schon gezeigt; dass die Bedingung auch hinreichend ist, sieht man sofort ein, wenn man die Folge $y_1, y, y_2, y, y_3, \ldots$ betrachtet; sie ist nach dem vorstehenden Satz konvergent. Ihr Limes kann aber nur y sein; es ist dann auch $y_n \to y$.

Satz 10. Damit die Folge $\{y_n\}$ gegen das Element y $/x/$-konvergiere, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\lim_{n\to\infty} \rho/y_n, y/ = 0 \qquad /8/$$

Beweis. Es sei $y_n \to y$ $/x/$. Wäre dann /8/ nicht erfüllt, so würde es dann eine Teilfolge $\{y_{n_i}\}$ und ein $\varepsilon > 0$, mit $\rho/y_{n_i}, y/ \geq \varepsilon$ geben. Aus dieser Folge ist es nicht möglich, nach Satz 9, eine gegen y konvergente Folge herauszugreifen. Das widerspricht aber der Definition der $/x/$-Konvergenz.

Es sei jetzt /8/ erfüllt. Es sei eine wachsende Folge ganzer Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ so gewählt, dass

$$\rho/y_n, y/ < \frac{1}{2^k} \quad \text{für} \quad n \geq n_k$$

Dann ist nach /2/

$$\rho/y_{n_k}, y_{n_{k+1}}, \ldots, y_{n_{k+p}}, y/ = \rho/y_{n_k}, y, y_{n_{k+1}}, y, \ldots, y_{n_{k+p}}, y/$$

$$\leq 4\rho/y_{n_k}, y/ + 4\rho/y_{n_{k+1}}, y/ + \ldots \leq 4\,/\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots/ =$$

$$= \frac{1}{2^{k-3}} \longrightarrow 0.$$

Nach Satz 9 haben wir also $y_{n_k} \to y$.

Satz 11. Damit die Folge $\{y_n\}$ gegen ein endliches

Element konvergiere, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\lim_{n\to\infty} \rho/y_n, y_{n+p}/ = 0 \qquad /9/$$

Die Notwendigkeit folgt aus dem vorstehenden Satz-und /3/. Umgekehrt, ist /9/ erfüllt, so kann man leicht eine Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ angeben, für welche gilt

$$\lim_{k\to\infty} \rho/y_{n_k}, \ldots, y_{n_{k+p}}/ = 0.$$

Dann ist $y_{n_k} \to y$ /y endlich/, also $\rho/y_{n_k}, y/ \to 0$. Daraus und aus /9/ folgt dann $\lim_n \rho/y_n, y/ = 0$, $y_n \to y$ /*/.

Satz 12. Aus $y_n \to y$, $y_n' \to y'$ folgt $\sup /y_n, y_n'/ \to \sup /y, y'/$.

Aus $y_n \to y$ /*/, $y_n' \to y'$ /*/ folgt $\sup /y_n, y_n'/ \to \sup /y, y'/$ /*/

y, y' werden von $-\infty$ verschieden vorausgesetzt; ähnliches gilt für inf statt sup.

Die Behauptungen folgen unmittelbar aus den Ungleichungen /5/:

$$\rho/\sup /y_n, y_n'/, \ldots, \sup /y_{n+p}, y_{n+p}'/, \sup /y, y'/ \leq$$
$$\leq \rho/y_n, \ldots, y_{n+p}, y/ + \rho/y_n', \ldots, y_{n+p}', y'/$$
$$\rho/\sup /y_n, y_n'/, \sup /y, y'/ \leq \rho/y_n, y/ + \rho/y_n', y'/.$$

Satz 13. Aus den Axiomen 1-III[12], Va, 1°-5° folgt Vb.

Beweis. Es sei $\inf_n y_n = -\infty$, y beliebig. Dann ist, unter Benutzung des vorigen Satzes,

$$\inf_n \{\sup /y, y_n/\} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\leq n} \{\sup /y, y_k/\} = \lim \sup$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sup /y, \inf_{k\leq n} y_k/ = \sup /y, \inf_n y_n/$$

Ähnlich wird auch die zweite Hälfte von Vb bewie-

12/. Vgl. Fussnote 10/.

sen.

Genügt die metrische Funktion der Ungleichung

$$\rho/y_1,y_2/ < \rho/y_1,y_3/ \quad \text{für} \quad y_1 \leq y_2 < y_3,$$

so folgt auch das Axiom IV aus den übrigen. Ausserdem kann dann in III die Existenz des Supremum nur für abzählbare nach oben beschränkte Mengen gefordert werden, für unabzählbare wird das beweisbar[13/].

Unter den zu Anfang dieses § gemachten Voraussetzungen kann man in Y eine andere metrische Funktion $\tau/y_1,y_2/$ einführen, die für alle y_1,y_2 den Sinn hat, den Bedingungen 1°-5° und ausserdem noch der Dreiecksbedingung genügt und der metrischen Funktion $\rho/y_1,y_2/$ equivalent ist /d.h. $\rho/y,y_n/ \to 0$ und $\tau/y,y_n/ \to 0$ bedeutet dasselbe/. Betrachten wir

$$\tau/y,y'/ = \inf_{y_1,y_2,\dots,y_n \in} \left\{ \rho/y,y_1/ + \rho/y_1,y_2/ + \dots + \rho/y_n,y'/ \right\}$$

Es ist nach /2/

$$\frac{1}{2}\rho/y,y'/ \leq \tau/y,y'/ \leq \rho/y,y'/$$

$\tau/y,y'/$ hat alle angeführten Eigenschaften, so ist z.B.

$$\tau/y,y'/ = \inf_{y_1,\dots,y_n \in} \left\{ \rho/y,y_1/ + \dots + \rho/y_n,y'/ \right\} \geq$$

$$\geq \inf \left\{ \rho/\sup/y,z/,\sup/y_1,z/ + \dots + \rho/\sup/y_n,z/,\sup/y',z/ \right\}$$

$$\geq \inf_{z_1,\dots,z_n \in} \left\{ \rho/\sup/y,z/,z_1/ + \dots + \rho/z_n,\sup/y',z/ \right\} = \tau/\sup/y,z/,\ \sup/y,z/,$$

für beliebige y,y',z.

Es sei noch erwähnt, dass das Axiom 2° durch das folgende schwächere sich ersetzen lässt:

13/. Wegen des Beweises vgl. Kantorovitch, loc. cit., insb. S. 148 oder Beispiel 3 in § 1 dieser Arbeit.

2^*. Es gibt eine positive Funktion $\varphi(\varepsilon)$, die für alle $\varepsilon>0$ definiert ist, derart, dass aus $y_1 \leq y_2 \leq y_3$ und

$$\rho/y_1,y_2/<\varepsilon,\ \rho/y_2,y_3/<\varepsilon \text{ folgt } \rho/y_1,y_3/<\varphi(\varepsilon)$$

Dann lässt sich eine mit $\rho(y_1,y_2)$ equivalente Funktion einführen, für welche 1°-5° gelten[14/].

§ 4. Räume mit metrischer Funktion, die unsymmetrisch ist inbezug auf Infimum und Supremum.

Wir betrachten jetzt eine allgemeinere Klasse von Räumen, als die in § 3 betrachtete. Es sei $Y=\{y\}$ ein halbgeordneter Raum, im welchen die Axiome I-IV[15/] und die erste Hälfte von Axiom Vb.

$$\sup /y,\inf_n y_n/ = \inf_n /\sup /y,y_n//.$$

erfüllt sind.

Ausserdem soll in Y für vergleichbare y_1,y_2 $/y_1 \leq y_2/$ die nichtnegative metrische Funktion $\rho/y_1,y_2/$ definiert sein mit den Eigenschaften $1^\circ,2^\circ,4^\circ$ des § 3 und den folgenden:

3^*. $\rho/\sup /y,y_1/,\sup /y,y_2//\leq\rho/y_1,y_2/$

$$\rho/y_1,y_2/\leq\rho/y_1,y_3/ \text{ für } y_1\leq y_2\leq y_3$$

5^*. Für keine gegen $+\infty$ konvergente Folge $\{y_n\}$ soll sein

$$\lim_{n\to\infty} \rho/y_n,\ y_{n+p}/ = 0.$$

Wir setzen für beliebige y_1,y_2

$$\rho/y_1,y_2/= \rho/y_1,\sup /y_1,y_2//$$

Dann gilt für beliebige y_1,y_2 die erste Hälfte von 3^*

14/. Man vergleiche z.B. Frink, Bull.A.M.S. vol.43, n° 2, 1937, S.133-142.

15/. Aus dem Axiom II brauchen wir weiter nur die erste Hälfte /mit sup./

$\rho/y_1,y_2/=\rho/y_1,\sup/y_1,y_2//\geq\rho/\sup/y_1,y/,\sup/y_1,y_2,y//=$
$/y_1,y_2,y/=\rho/\sup/y_1,y/,\sup/y_2,y//.$

$\rho/y_1,y_2/=0$ ist mit $y_2\leq y_1$ gleichbedeutend. Aus 3^* folgt

$$\rho(y_1,y_3)\geq\rho(y_2,y_3)\quad\text{für}\quad y_1\leq y_2\leq y_3$$

Es gilt die Dreieickungleichung:

$\rho/y_1,y_3/\leq\rho/y_1,\sup/y_2,y_3//\leq\rho/y_1,\sup/y_1,y_2//+$
$+\rho/\sup/y_1,y_2/,\sup/y_1,y_2,y_3//\leq\rho/y_1,y_2/+\rho/y_2,y_3/$

Satz 14. Für die Ungleichung $y\geq\overline{\lim}\,y_n$ ist notwendig und hinreichend, dass

$$\lim_{n\to\infty}\rho/y,\sup/y_n,\dots,y_{n+p}//=0\qquad/p>0/$$

Dabei wird $\overline{\lim}\,y_n>-\infty$ vorausgesetzt.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Es sei

$\overline{y}_n^m=\sup/y,y_n,\dots,y_m/,\ \overline{y}_n=\sup/y,y_n,\dots/\quad/m>n/$

Dann ist

$\rho/\overline{y}_n^m,\overline{y}_n^{m+p}/=\rho/\sup/y,y_n,\dots,y_m/,\sup/y,y_n,\dots,y_{m+p}//$
$\leq\rho/y,\sup/y,y_m,\dots,y_{m+p}//\to 0.$

Nach 5^* ist also $\overline{y}_n=\lim_m\overline{y}_n^m$ endlich.

Aus der Ungleichung

$$\rho/y,\overline{y}_n/\leq\rho/y,\overline{y}_n^m/+\rho/\overline{y}_n^m,y_n/$$

folgt, wenn man 4^0 heranzieht, dass $\rho/y,\overline{y}_n/\to 0$.

Dann ist

$$\rho/y,\inf_n\overline{y}_n/\leq\inf_n\rho/y,\overline{y}_n/=0,\qquad\inf_n\overline{y}_n\leq y$$

Es ist aber

$\inf_n\overline{y}_n=\inf_n\left\{\sup/y,\sup_{k\geq n}y_k/\right\}=\sup/y,\inf_n\sup_{k\geq n}y_k/=$
$=\sup/y,\overline{\lim}\,y_n/$

und deshalb $y\geq\overline{\lim}\,y_n$.

Die Bedingung ist notwendig. Aus $y\geq\overline{\lim}\,y_n$ folgt

$\rho/y,\sup_{k\geq n}y_k/\leq\rho/y,\overline{\lim}\,y_k/+\rho/\overline{\lim}\,y_k,\sup_{k\geq n}y_k/=$

$$= \rho/\overline{\lim}\, y_k, \sup_{k\geq n} y_k/ \longrightarrow 0$$

nach 4°. Umsomehr ist unsere Bedingung erfüllt

Satz 15. Für die Ungleichung $y \geq \overline{\lim}^{*} y_n$ ist die Bedingung

$$\rho/y, y_n/ \longrightarrow 0$$

hinreichend; ist für keine Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ $\lim y_{n_k} = -\infty$, so ist sie auch notwendig.

Beweis. Es sei /10/ erfüllt. Aus der Ungleichung /$m > n$/

$$\rho/y, \sup /y, y_n// + \rho/y, \sup/y, y_{n+1}// + \ldots + \rho/y, \sup/y, y_m//$$
$$\geq \rho/y, \sup /y, y_n// + \rho/\sup /y, y_n/, \sup /y, y_n, y_{n+1}// + \ldots +$$
$$+ \rho/\sup/y, y_n, \ldots, y_{m-1}/, \sup/y, y_n, \ldots, y_m//\geq$$
$$\geq \rho/y, \sup /y_n, \ldots, y_m//$$

folgt leicht, dass es eine Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ gibt, für welche die Bedingung des vorigen Satzes zutrifft. Dann ist aber $y \geq \overline{\lim}\, y_{n_k}$. Da diese Schlussweise auch für jede Teilfolge von $\{y_n\}$ gilt, so ist $y \geq \overline{\lim}^{*} y_n$.

Um die Notwendigkeit zu beweisen, setzen wir voraus, dass $\rho/y, y_n/$ nicht gegen Null konvergiert. Dann ist für eine bestimmte Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ $\rho/y, y_{n_k}/\geq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Aus dieser Folge, nach Satz 14 kann keine Unterfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$ herausgegriffen werden, für welche $y \geq \overline{\lim_i}\, y_{n_{k_i}}$ sein würde. Das widerspricht aber der Definition des oberen /~~x~~/-Limes.

Die zusätzliche Bedingung des Satzes ist insbesondere dann erfüllt, wenn der Raum Y die folgende Eigenschaft besitzt:

6°. Für jede Folge $\{y_n\}$ ist $\overline{\lim}\, y_n > -\infty$

Wir definieren jetzt den grössten und den kleinsten metrischen Limes $\overline{\rho\lim}\, y_n$ bzw. $\underline{\rho\lim}\, y_n$ fol-

gendermassen: $\overline{\rho\lim}\, y_n$ ist das kleinste y, das der Bedingung $\rho/y, y_n/ \to 0$ genügt. $\underline{\rho\lim}\, y_n$ ist das grösste y, für das gilt $\rho/y_n, y/ \to 0$.

Wenn es keine solche y gibt, so setzen wir $\overline{\rho\lim}\, y_n = +\infty$ bzw. $\underline{\rho\lim}\, y_n = -\infty$.

Ist die Bedingung 6^0 erfüllt, so folgt aus Satz 15 dass $\overline{\rho\lim}\, y_n$ stets existiert und es ist

$$\overline{\rho\lim}\, y_n = \overline{o\lim}^{*}\, y_n$$

Wir zeigen nun, dass auch $\underline{\rho\lim}\, y_n$ immer den Sinn hat.

Aus $\rho/y_n, y/ \to 0$, $\rho/y_n, y'/ \to 0$ folgt

$$\rho/y_n, \sup/y, y'/ \leq \rho/y_n, \sup/y, y_n/ + \rho/\sup/y, y_n/, \sup/y, y', y_n/ \leq \rho/y_n, y/ + \rho/y_n, y'/ \to 0$$

und ebenso für eine beliebige endliche Anzahl solcher y

Es sei jetzt $\{y^{(k)}\}$ eine Folge von Elementen y, für welche gilt $\rho/y_n, y/ \to 0$, die so beschaffen ist, dass $\sup y^{(k)} = y_0$ gleich dem Supremum aller solcher y ist. Man kann offenbar $y^{(k)}$ monoton wachsend annehmen Aus der Ungleichung

$$\rho/y_n, y_0/ \leq \rho/y_n, y^{(k)}/ + \rho/y^{(k)}, y_0/$$

folgt, dass auch $\rho/y_n, y_0/ \to 0$, y_0 ist also der kleinste metrische Limes.

Satz 16. Es ist

$$\underline{o\lim}\, y_n \geq \underline{\rho\lim}\, y_n \geq \underline{U\lim}^{*}\, y_n \qquad /10/$$

Es wird dabei vorausgesetzt, dass für keine Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ ist $\underline{\lim}\, y_{n_k} = +\infty$.

Beweis. Es sei $\rho/y_n, y/ \to 0$. Dann ist umsomehr $\rho/\bar{y}_n^m, \sup/y, \bar{y}_n^m/ \to 0$, für $n \to \infty$ $/m > n/$. Hier bedeutet $\bar{y}_n^m = \sup/y_n, \ldots, y_m/$, $\bar{y}_n = \sup/y_n, \ldots/$

$$\rho/\bar{y}_n, \sup/y, \bar{y}_n/ \leq \rho/\bar{y}_n^m, \sup/y, \bar{y}_n/ \leq \rho/\bar{y}_n^m, \sup(y, \bar{y}_n^m)/ + \rho/\sup/y, \bar{y}_n^m/, \sup/y, \bar{y}_n/ .$$

Der erste Summand rechts ist beliebig klein für grosse n, der zweite ist kleiner als $\rho/\overline{y}_n^m, \overline{y}_n/$ und das konvergiert gegen Null für $m \to \infty$. Es ist also

$$\rho/\overline{y}_n, \sup /y, \overline{y}_n// \to 0;$$

anderseits ist diese Zahlenfolge monoton nichtabnehmend, folglich $\rho/\overline{y}_n, \sup /y, \overline{y}_n// = 0$, $y \leq \overline{y}_n$ und $y \leq \overline{\lim}\, y_n$. Diese Schlussweise ist auch für jede Teilfolge von $\{y_n\}$ anwendbar, also ist $y \leq \underline{\lim}\, y_n$. Damit ist die erste Hälfte von /10/ bewiesen.

Es sei jetzt $y_0 = \underline{U \lim}\, y_n$. Wir zeigen, dass $\rho/y_n, y_0/ \to 0$, d.h. $y_0 \leq \underline{\rho\lim}\, y_n$. In der Tat: im entgegengesetzten Falle hätten wir eine Teilfolge $\{y_{n_k}\}$ mit $\rho(y_{n_k}, y_0) \geq \varepsilon > 0$. Es gibt eine weitere Teilfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$, für welche $y_0 \leq \underline{\lim}\, y_{n_{k_i}} = z_0$. Dann ist

$$\rho/y_{n_{k_i}}, y_0/ = \rho/y_{n_{k_i}}, \sup /y_0, y_{n_{k_i}}// \leq \rho/y_{n_{k_i}}, \sup/y_{n_{k_i}}, z_0)$$

$$\leq \rho/y_{n_{k_i}}, \inf_{j \geq m} y_{n_{k_j}}/ + \rho/\inf_{j \geq m} y_{n_{k_j}}, z_0/.$$

Das zweite Glied ist beliebig klein für grosse m, das erste gleich Null für festes m und genügend grosse i, also

$$\rho/y_{n_{k_i}}, y_0/ \to 0$$

was einen Widerspruch ergibt.

Fallen der obere und untere metrische Limes zusammen, so heisst die Folge metrisch konvergent und

$$\rho\lim y_n = \overline{\rho\lim}\, y_n = \underline{\rho\lim}\, y_n = y$$

ihr metrischen Limes. Mit anderen Worten, $\{y_n\}$ nennen wir dann und nur dann gegen y metrisch konvergent, wenn $\rho/y, y_n/ \to 0$, $\rho/y_n, y/ \to 0$.

In den Räumen des in § 3 besprochenen Typus ist eine Folge y_n dann und nur dann metrisch konver-

gent, wenn sie gegen ein endliches Element /x/-konvergent ist. In der Tat, mit Hilfe des Axioms 3° bekommt man

$$\rho/y_n,y/=\rho/y_n,\sup/y,y_n//\geq\rho/\inf/y_n,y/,\inf/y_n,\sup/y,y_n//)$$
$$=\rho/\inf/y_n,y/,y_n/.$$

Ist also die Folge $\{y_n\}$ gegen y metrisch konvergent, so ist

$$\lim_{n\to\infty}\rho/\inf/y_n,y/,\sup/y_n,y//=0,$$

also nach Satz 10 $y_n\to y$ /x/. Das Umgekehrte folgt aus Satz 10 und der Definition der metrischen Funktion.

Ist der Raum Y kompakt, d.h. gilt das Axiom VI. Aus jeder Folge $\{y_n\}$ lässt sich eine konvergente Unterfolge mit einem endlichen Limes aussondern, so fällt die metrische Konvergenz mit der oberen /x/-Konvergenz zusammen: $\rho\lim y_n=y$ bedeutet $\overline{o\lim}^{x}\, y_n=$ $=\underline{o\lim}\, y_n=y$ [16].

Es genügt zu zeigen: $\underline{\rho\lim}\, y_n=\underline{o\lim}\, y_n$. Es sei $\underline{o\lim}\, y_n=y$, aber $\rho/y_n,y/$ nicht gegen Null konvergent. Wir nehmen eine Unterfolge $\{y_{n_k}\}$ derart, dass $\rho/y_{n_k},y/\geq\varepsilon>0$. Nach VI gibt es eine konvergente Teilfolge $\{y_{n_{k_i}}\}$. Da, wie man unschwer beweist, die metrische Funktion stetig ist, bekommen wir $\rho(\lim y_{n_{k_i}},y)>0$.

Das ist aber ein Widerspruch, denn es ist $y\leq\lim y_{n_{k_i}}$.

Beispiel 1. Wir betrachten die Gesamtheit Y aller abgeschlossenen nichtleeren Mengen Y eines kompakten metrischen Raumes T. Führt man auf natürli-

---

16/. Vgl. die Fussnote 9/.

che Weise die Beziehung ein $/y_1 < y_2$ bedeutet $y_1 \subset y_2$, $y_1 \neq y_2/$, und die metrische Funktion

$$\rho/y_1, y_2/ = \inf_{y_2 \subset U_\delta(y_1)} \delta \qquad /y_1 \leq y_2/$$

ein, wo $U_\delta /y_1/$ die δ-Umgebung der Menge y_1 ist, d.h. die Gesamtheit der Punkte, die einen Abstand von der Menge y_1^- haben, so erhalten wir den halbgeordneten Raum, den wir den Hausdorffschen Raum[17] des Raumes T nennen werden. Die Axiome I-IV[18], Vb /erste Hälfte/ sind sogar dann erfüllt, wenn T separabel /und nicht notwendig kompart/ ist. Nur IV bedarf eines Beweises. Es sei $E = \{y_\xi\}$, $\xi \in \Xi$. Hier ist sup E die abgeschlossene Hülle der Summe $\overline{\sum y_\xi}$, inf E der Durchschnitt $\prod y_\xi$. Wir wählen eine in $\overline{\sum y_\xi}$ überall dichte abzählbare Punktfolge, nehmen die entsprechenden Mengen y_ξ, und erhalten auf diese Weise die Menge $E' = \{y'_{\xi_n}\}$ $n = 1,2,\ldots$ mit $\sup E' = \sup E$. Da in einem separablen Raume eine fallende wohlgeordnete Folge von abgeschlossenen Mengen nur höchstens abzählbar sein kann, ist es möglich, eine Menge $E'' = \{y''_{\xi_n}\}$ so anzugeben, dass $\inf E'' = \inf E$ wird. Damit ist IV bewiesen. VI ist nur für kompakte T richtig[19].

17/. Vgl.z.B. Alexandroff und Hopf, Topologie, I.S. 111-116

18/. Wegen des Axioms II vgl.die Fussnote[15]; für zwei disjunkte abgeschlossene Mengen y_1, y_2 wird man $\inf /y_1, y_2/ = -\infty$ setzen müssen.

19/. Eine konvergente Teilfolge kann man aus einer gegebenen Folge für separable T aussondern /vgl. ~~Alexandroff und Hopf, S~~ Hausdorff, Mengenlehre, S. 148 /, aber ihr Limes kann auch $-\infty$ sein.

Die Axiome $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{*}, 5^{*}$ folgen fast unmittelbar aus der Definition der Funktion $\rho/y_1, y_2/$, /sogar für beliebige beschränkte T/; auch 4° kann für kompakte T unter Benutzung des Heine-Borel'schen Satzes leicht bewiesen werden.

Die obere Konvergenz von $\{y_n\}$ gegen y /d.h. $\overline{o\lim}\, y_n = \underline{o\lim}\, y_n = y$ / ist mit

$$\prod_{n=1}^{\infty} \overline{\sum_{k=n}^{\infty}} y_k = \prod_{\{n_k\}} \overline{\sum_{k=1}^{\infty}} y_{n_k} = y$$

gleichbedeutend, also mit der topologischen Konvergenz der Folge $\{y_n\}$ gegen y [20]. Da für den Hausdorff"schen Raum die Bedingung

$$\rho/y, \sup_{k\leq n} y_k/ \leq \sup_{k\leq n} \rho/y, y_k/$$

erfüllt ist, fallen $\overline{o\lim}^{*}\, y_n$ und $\overline{o\lim}\, y_n$ zusammen. Es ist also

$$\overline{\rho\lim}\, y_n = \overline{o\lim}\, y_n, \quad \underline{\rho\lim}\, y_n = \underline{o\lim}\, y_n.$$

Beispiel 2. Wir betrachten die Gesamtheit Y aller nach oben halbstetigen reelen Funktionen $y/t/$, die in einem kompakten metrischen Raume $T = \{t\}$ definiert sind. Die Mengen

$$E_y = \underset{(t,x)}{\mathcal{E}} \left[t \in T, \quad x \leq y(t) \right],$$

die als Untermengen des Produktraumes $T \times X$ anzusehen sind /X - die Gerade/, sind abgeschlossen.

$y_1 < y_2$ bedeute soviel wie $y_1(t) \leq y_2(t)$ und nicht identisch gleich, oder, was dasselbe ist, $E_{y_1} \subset E_{y_2}$ und $E_{y_1} \neq E_{y_2}$. Dadurch wird Y zu einem halbgeordneten Raume, der einer Untermenge des Hausdorff'schen

---

20/. Vgl. Alexandroff und Hopf, S.112

Raumes für $T \times X$ isomorph ist, nämlich der Menge aller $E\mathfrak{A}$. Die Axiome I-IV, Vb /erste Hälfte/ sind erfüllt, da sup und inf von $E\mathfrak{A}$ - Mengen wieder solche Mengen sind.

Man kann in Y auch die metrische Funktion einführen. Durch die Schränkungstransformation der Geraden X in die Strecke $/-1,+1/$ werden die Mengen Ey beschränkt, und man führe für diese Mengen, wie in Beispiel 1, die metrische Funktion, die dann als eine metrische Funktion der Elemente y betrachtet werden kann. Diese Funktion genügt den Axiomen 1,2,3^{x},4,5^{x}.

Hätten wir für die Funktionen $y(t)$ auch die unendlichen Werte zugelassen, so würde Y sogar kompakt sein.

§ 5. Halbstetige Funktionen, deren Werte Elemente eines halbgeordneten Raumes sind.

In diesem Paragraphen werden wir stetige und halbstetige Funktionen $y = f\ /x/$ betrachten, die einen metrischen Raum $X = \{x\}$, in einen halbgeordneten Raum /Axiome I-III/ $Y = \{y\}$ überführen.

Die Distanz zwischen zwei Punkten x und x' des Raumes X wird weiter mit $/x,x'/$ bezeichnet.

Wir nennen $f\ /x/$ im Punkte x_0 stetig, wenn für jede gegen das Element x_0 konvergierende Folge $\{x_n\}$ die Beziehung gilt $\lim f(x_n) = f(x_0)$. Ist im Raume Y eine metrische Funktion definiert /wie in § 3, Bedingungen 1^0-5^0/, so kann man die Stetigkeit im Punkte x_0 auch so ausdrücken: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass aus den Ungleichungen

$$/x_0,x_1/ < \delta\ ,\quad /x_0,x_2/ < \delta\ ,\ \ldots,\ /x_0,x_p/ < \delta$$

folgt

$$\rho\left(f\,/x_0/, f\,/x_1/, \ldots, f\,/x_p/\right) < \varepsilon$$

Wir zeigen, dass $f/x/$ nicht stetig sein kann, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist /das Umgekehrte ist evident/. Es existiert unter dieser Voraussetzung ein bestimmtes $\varepsilon > 0$ und für jedes ganze $\overline{k}$ eine endliche Gruppe der Elemente $x_1^k, \ldots, x_{p_k}^k$, wobei $/x_0, x_1^k/ < \frac{1}{k}, \ldots, /x_0, x_{p_k}^k/ < \frac{1}{k}$; $\rho\left(f/x_0/, f/x_1^k/, \ldots, \ldots, f\,/x_{p_k}^k/\right) \geq \varepsilon$.

Die Folge $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{p_1}^1, x_2^2, \ldots$ konvergiert offensichlich gegen x_0, aber die Folge der zugehörigen Funktionenewerte konvergiert nicht gegen $f/x_0/$ /Vgl. § 3, Satz 9 /.

Ist der Raum X kompakt, so ist die obenangeführte Bedingung sogar gleichmässig erfüllt, d.h. die Funktion $f/x/$ ist dann gleichmässig stetig.

Es sei jetzt $y = f/x/$ eine beliebige Funktion /deren Werte auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein können/, die X in Y überführt. Die obere Schranke von $f/x/$ im Punkte x_0 definieren wir durch die Gleichung

$$M\,/x_0/ = M_f/x_0/ = \inf_{r>0} \left\{ \sup_{(x, x_0) \leq r} f\,(x) \right\}.$$

Wir werden sagen, $f/x/$ sei im Punkte x_0 nach oben halbstetig, wenn $M_f/x_0/ = f/x_0/$ ist. Eine in allen Punkten nach oben halbstetige Funktion nennen wir schlechthin nach oben halbstetig. Auf ähnliche Weise kann die untere Schranke einer Funktion und die nach unten halbstetigen Funktionen eingeführt werden. Wir beschränken ans aber im Weiteren meistenteils auf die erste Klasse der halbstetigen Funktionen.

Es ist immer $f/x/ \leq M_f/x/$. Wir zeigen, dass

$M_{M_f}/x/ = M_f/x/$ ist; mit anderen Werten, $M_f/x/$ ist nach oben halbstetig. In der Tat:

$$M_{M_f}/x_0/ = \inf_{\tau>0} \sup_{/x_0,x/\leq\tau} M_f/x/ \leq \inf_{\tau>0} \sup_{/x_0,x/\leq\tau} \sup_{/x,x'/\leq\tau} f/x'/ \leq \inf_{\tau>0} \sup_{/x_0,x'/\leq 2\tau} f/x'/ = M_f/x_0/.$$

Satz 17 [21]. Sind die Funktionen $f_\xi/x/$, $\xi\in\Xi$ alle halbstetig nach oben, so ist auch $f/x/ = \inf_{\xi\in\Xi} f_\xi/x/$ halbstetig nach oben.

Wir haben $M_f/x/ \leq M_{f_\xi}/x/ = f_\xi/x/$ für alle ξ, also auch $M_f/x/ \leq f/x/$, woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Um weiter zu gehen, werden wir zwei folgende Axiome nötig haben, denen der Raum Y genügen soll.

Axiom IV*. /Eine Verschärfung von IV/. Ist für die Mengen $E_n \subset Y$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup E_n\right] = y,$$

so existieren endliche Untermengen E'_n dieser Mengen, $E'_n \subset E_n$ derart, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup E'_n\right] = y.$$

wird. Diese Behauptung soll auch mit inf statt sup richtig sein

Axiom VII. Für zwei beliebige Elemente y_1, y_2, wobei $y_1 < y_2$ ist, soll ein Element y_3 existieren, der zwischen y_1 und y_2 liegt: $y_1 < y_3 < y_2$.

Satz 18. Für die Halbstetigkeit von $f/x/$ nach

21/. Die Sätze 17-21 wurden in der Arbeit von L. Kantorovitch, Einige Sätze über halbgeordnete Räume allgemeiner Art, C.R. de l'Acad. des Sc. de l'USSR, t. II, n°1 /1936/, ohne Beweis mitgeteilt.

oben im Punkte x_0 ist notwendig und hinreichend, dass

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f/x_n/ \leq f/x_0/$$

für jede Folge $\{x_n\}$, die gegen x_0 konvergiert.

Beweis. Es ist immer $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f/x_n/ \leq M_f/x_0/$, also die Bedingung ist notwendig. Jetzt setzen wir voraus, dass unsere Bedingung erfüllt ist. Wir haben:

$$M_f/x_0/ = \inf_n \sup_{/x_0,x/\leq \frac{1}{n}} f/x/$$

Nach IV* kann man solche endliche Punktgruppen $x_1^n,\ldots,x_{p_n}^n$ mit $/x_0,x_i^n/\leq \frac{1}{n}$ für $i = 1,2,\ldots,p_n$ wählen, dass

$$M_f/x_0/ = \lim_n \sup_{i\leq p_n} f/x_i^n/.$$

Bilden wir jetzt die Folge $x_1^1,\ldots,x_{p_1}^1, x_1^2,\ldots$ und bezeichnen ihre Elemente, der Reihenfolge nach, mit $\overline{x}_k$, $k = 1,2,\ldots$, so haben wir

$= \inf_n \sup_{n\geq n} \sup_{i\leq p_n} f(x_i^n)$

$$M_f/x_0/ = \lim_n \sup_{i\leq p_n} f/x_i^n/ = \inf_n \sup_{k\geq n} f/\overline{x}_k/ = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, f/x_k/ \leq$$
$$\leq f/x_0/,$$

also die Funktion $f/x/$ ist wirklich nach oben halbstetig.

Auf ähnliche Weise können die nach unten halbstetigen Funktionen charakterisiert werden. Daraus ergibt sich: eine Funktion $f/x/$ ist dann und nur dann stetig, wenn sie nach oben und nach unten halbstetig ist.

Aus Satz 18 ergibt sich unmittelbar der folgende

Satz 19. Für eine nach oben halbstetige Funktion $f/x/$ ist die Menge $E\,[f/x/ \geq y]$ nach oben abgeschlossen.

Satz 20. Ist der Raum X kompakt, so ist jede

endliche und nach oben halbstetige Funktion $f/x/$ nach oben beschränkt.

Beweis. Würde $f/x/$ nach oben nicht beschränkt sein, so könnte man nach IV eine Folge $\{x_n\}$ angeben /die man gegen ein bestimmtes x_0 konvergent voraussetzen kann/ für welche $\sup f/x_n/ = +\infty$ ist. Dann würde aber auch $f/x_0/ = +\infty$ sein.

Hilfssatz. Ist der Raum Y separabel /als topologischer Raum, vgl. § 1/ und y_0, y_1 $/y_0 < y_1/$ zwei Elemente dieses Raumes, so existiert eine monoton wachsende, stetige Funktion $y/t/$, $0 \leq t \leq 1$, deren Werte im Raume Y liegen und für welche gilt $y/0/ = y_0$, $y/1/ = y_1$.

Beweis. Durch tranfinite Induktion kann man /mit Hilfe von VII/ leicht eine Menge Y angeben, die geordnet ist /d.h. alle ihre Elemente sind vergleichbar/, nur aus Elementen, die $\geq y_0$ und $\leq y_1$ sind, besteht und in keiner grösseren Menge dieser Art enthalten ist. Nun ist bekannt[22], dass in diesem Falle eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Elemente der Menge Y_0 und der Zahlen der Strecke $/0,1/$ existiert, bei der die Beziehung $<$ erhalten bleibt.

Auf diese Weise bekommen wir eine monoton wachsende Funktion $y = y/t/$; wir haben offenbar $y/0/ = y_0$, $y/1/ = y_1$. Diese Funktion ist stetig, denn aus ihrer Definition folgt, dass $t_n \to t$ mit $y/t_n/ \to y/t/$ gleichbedeutend ist.

Satz 21. Sind die Räume X und Y separabel,

22/ Vgl. z. B. Hausdorff, Mengenlehre, 2. Aufl., S. 52.

so kann jede nach oben halbstetige Funktion $f/x/$ als ein Grenzwert einer abnehmenden Folge von stetigen Funktionen $\varphi_k/t/$ dargestellt werden.

Beweis. $\{x_n\}$ sei eine in X überall dichte Folge. Wir setzen

$$y_{n,i} = \sup_{/x_n,x/\leq\frac{1}{i}} f/x/.$$

Dann können wir, unter Benutzung des Hilfssatzes, eine stetige und monoton wachsende Funktion $y_{n,i}/t/$, $0 \leq t \leq 1$ bilden, die im Intervall $\left[0, \frac{1}{i+1}\right]$ gleich $y_{n,i}$ ist, im Intervall $\left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]$ von $y_{n,i}$ bis $+\infty$ wächst und für $t \geq \frac{1}{i}$ gleich $+\infty$ ist.

Die Funktionen

$$f_{n,i}\ /x/ = y_{n,i}\left(/x,x_n/\right)$$

sind stetig und $\geq f/x/$. Wir bilden die ebenfalls stetigen Funktionen

$$\varphi_k/x/ = \inf_{n,i\leq k}\left\{f_{n,i}(x)\right\}$$

die auch $\geq f\ /x/$ sind und mit wachsendem k abnehmen. Für jedes x und jedes ganze i kann man $n = n/i/$ so wählen, dass $/x,x_n/ \leq \frac{1}{i+1}$, wird; daraus folgt

$$f_{n,i}/x/ = y_{n,i} = \sup_{/x,x'/\leq\frac{1}{i}} f/x'/ \leq \sup_{/x,x'/\leq\frac{2}{i}} f/x'/$$

und für genügend grosse k auch $\varphi_k/x/ \leq \sup_{(x,x')\leq\frac{2}{i}} f/x'/$ Wir haben demzufolge $\lim_{k\to\infty} \varphi_k/x/ \leq M_f/x/ = f/x/$, also $\lim \varphi_k/x/ = f/x/$ und unser Satz ist beweisen.

Satz 22. /Einschiebungssatz/. Ist $f/x/ \leq g/x/$,

wo $f/x/$ eine nach oben halbstetige, $g/x/$- eine nach nach unten halbstetige Funktion ist, so gibt es eine stetige Funktion $\varphi/x/$, die der Ungleichung genügt

$$f/x/ \leq \varphi/x/ \leq g/x/.$$

Hier wird vorausgesetzt, dass der Raum Y ausser den bisher benutzten Axiomen auch noch Vb erfüllt /stark distributiv ist/.

Beweis. Nach Satz 2.1 gibt es zwei Folgen stetiger Funktionen $\{f_n/x/\}$, $\{g_n/x/\}$, von denen die erste monoton abnehmend gegen $f/x/$ konvergiert, die zweite - monoton wachsend gegen $g/x/$. Wir bilden die folgenden stetigen Funktionen

$$\varphi_1/x/ = g_1/x/ \; ; \quad \varphi_2/x/ = \sup /g_1/x/, f_1/x/| \; .$$

Allgemein sei gesetzt

$$(*) \quad \varphi_{2i-1}/x/ = \inf\left(\varphi_{2i-2}/x/, g_i/x/\right); \quad \varphi_{2i}/x/ = \sup /\varphi_{2i-1}/x/, f_i(x)|$$

$f_i/x/$ $\qquad$ $/x/$

Wir haben /hier und weiter werden zur Abkürzung die Argumente unter den Funktionszeichen weggelassen/ $\varphi_{2i} \geq \varphi_{2i-1}$, $g_{i+1} \geq g_i \geq \varphi_{2i-1}$, also ist

$$\varphi_{2i+1} = \inf\left(\varphi_{2i}, g_{i+1}\right) \geq \varphi_{2i-1}$$

Ahnlich beweist man auch die Ungleichung $\varphi_{2i} \leq \varphi_{2i-2}$

---

x/. Die hier benutzte Beweisform /Vgl. H. Hahn Reelle Funktionen, Berlin 1932 /s. 252/, kann auch in anderen Fällen von Nutzen sein; man vgl. z.B. die Arbeit von M. Javez, Classification des éléments d'un espace semiordonné Berichte der Math. Ges. Charkow, Bd. XV_2, 1938, S. 35-41, wo der Einschiebungssatze auf diese Weise ohne die Voraussetzung, der Raum sei eine Abel'sche Gruppe, bewiesen werden kann.

Wir bezeichnen $\lim_{i\to\infty} \varphi_{2i-1}/x/ = \varphi_*/x/$, $\lim_{i\to\infty} \varphi_{2i}/x/ = \varphi^*/x/$. Offenbar ist $\varphi_*/x/$ nach unten, $\varphi^*/x/$ nach oben halbstetig. Durch Grenzübergang in $/*/$ erhalten wir.

$$\varphi_* = \inf/\varphi^*, g/ \; ; \quad \varphi^* = \sup \; /\varphi_*, f/ \; .$$

Daraus folgt $\varphi^* \geqq f$, aber auch $g \geqq f$, also $\varphi_* \geqq f$. Dann erhalten wir $\varphi^* = \sup /\varphi_*, f/ = \varphi_*$.

Bezeichnet man die beiden zusammenfallenden Funktionen $\varphi_*/x/$ und $\varphi^*/x/$ mit $\varphi/x/$, so ist $\varphi/x/$ stetig und erfüllt die Ungleichung

$$f/x/ \leqq \varphi/x/ \leqq g/x/$$

Leningrad.

Das Mathematische Institut der Universität.