Отзыв
о диссертации Г.Р. Лоренца «Об аппроксимативных полиномах»,
представленной на соискание степени кандидата.

Большая часть работы Г.Р. Лоренца посвящена различным вопросам, связанным с полиномами Бернштейна, в конце ее приведена одна интересная теорема о полиномах Стилтьеса – Ландау.

Полиномы Бернштейна, введенные впервые акад. С.Н. Бернштейном в 1912 году для представления непрерывных функций, последние 6-7 лет служили предметом исследования ряда авторов, в частности, самого С.Н. Эти исследования выяснили, что полиномы Бернштейна, а также другие аналогичные полиномы – заданные в той же форме, дают весьма удобный способ представления различных классов функций: непрерывных, полунепрерывных, суммируемых, произвольных измеримых, аналитических; при этом они дают способ представления, имеющий по сравнению с другими ряд интересных и полезных особенностей.

Результаты представленной диссертации являются существенным дополнением к предшествующим исследованиям. В некоторых ранее ставившихся вопросах достигнуто значительное продвижение; ряд интересных вопросов ставится в диссертации впервые.

Перейду к рассмотрению отдельных частей работы.

1. § 3 – Здесь Г.Р. устанавливает чрезвычайно сильную теорему о возможности p-кратного дифференцирования последовательности $B_n(x)$ при единственном условии – существовании p-ой производной в рассматриваемой точке. Ранее это было установлено лишь при условии непрерывности p-ой производной (Вигерт и Хлодовский), а по отношению к первой производной и для абсолютно-непрерывных функций в точках Lebesgue'а ее первой производной (Канторович, 1930).

Эти результаты представляют весьма частный случай результата Г.Р. Метод доказательства весьма тонкий и оригинальный.

2. § 4 – Доказывается сходимость в среднем обобщенных полиномов Бернштейна к суммируемой функции, что является важным при использовании этого способа представления. Далее с помощью этих полиномов автор дает условие компактности семейства суммируемых функций. Другие условия компактности таких семейств были в последние годы указаны Колмогоровым, Тамаркиным, Тулейковым, М. Риссом (M. Riess), Такахаши (Takahashi).

3. § 5 – Устанавливается сходимость вариации полиномов $B_n(x)$ к функции $f(x)$, если последняя ограниченной вариации. Далее, устанавливается сходимость по вариации полиномов, если функция f абсолютно непрерывна. По поводу теорем этого направления я сделаю несколько замечаний. a) Тот факт, что $Var\, B_n(x) \le Var\, f(x)$, использованный при доказательстве неравенства (4), был установлен недавно (*Mathematica*, vol. 10, p. 52). b) Доказательство теоремы 6 не вполне убедительно. Сам результат, по-моему, верен, но доказательство требует некоторого добавления. c) В теореме 7 достаточность ее условия есть частный случай того более общего факта, что множество абсолютно-непрерывных функций замкнуто относительно сходимости по вариации.

4. Автор дает два условия компактности семейства произвольных измеримых функций. Особенно интересно условие, основанное на использовании полиномов $Q_n(x)$, да и доказательство его более трудно. Два других условия компактности были даны ранее Верессом и Фреше.

5. Последний § посвящен полиномам Стилтьеса. Здесь устанавливается весьма глубокая теорема о сильной сходимости p-го порядка полиномов Стилтьеса к порождающей функции, если последняя суммируема с p-ой степенью. Из этой теоремы, в частности, получаются все результаты Торелли, а также Сакса о полиномах Стилтьеса.

Изложение доказательств чрезвычайно изящно и компактно; можно указать лишь на недостаточную в ряде мест подробность изложения доказательств, а также на недостаточную аккуратность в ссылках на литературу. Однако эти замечания не являются существенными.

В заключение можно сказать, что в целом работа содержит ряд новых, интересных и самостоятельно полученных результатов. Методы доказательств во многих случаях также оригинальны и интересны. Работа имеет значительный научный интерес и является ценным вкладом в теорию представления функций рядами полиномов. Работа с избытком удовлетворяет требованиям, предъявляемым к кандидатской диссертации.

Проф. Л. Канторович

28.IV.36

О некоторых аппроксимативных полиномах.

Г. Р. Лоренц

§1. Введение

В настоящей работе, составляющей вторую часть моей диссертации, я исследую различные свойства аппроксимативных полиномов, главным образом полиномов Бернштейна и их обобщений, предложенных Л.В. Канторовичем. Только последний § посвящен одному вопросу полиномов Stieltjes'а.

Ставшие классическими полиномы

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

/ $f(x)$ - функция, определенная на промежутке $(0,1)$/ были введены С.Н. Бернштейном для доказательства теоремы Weierstrass'а. Именно, если $f(x)$ непрерывна на $(0,1)$, полиномы $B_n^f(x)$ сходятся равномерно к генерирующей функции. Если ф-ция $f(x)$ обладает везде в промежутке $(0,1)$ непрерывными производными до r-ого порядка включительно, то соответственные производные сходятся равномерно к производным генерирующей функции $f(x)$. Этот результат ~~ер~~ (принадлежащий Хлодовскому и Wigert'у) сравнительно прост и доказывается применением ~~ф-р~~ теоремы Lagrange'а о конечном приращении. В §3 настоящей работы (§2 посвящен выводу вспомогательных оценок) доказывается более сильная теорема о сходимости производных полиномов Бернштейна для случая точечной дифференцируемости генерирующей функции. В частности, отсюда получается интересная теорема Л.В. Канторовича: обобщенные полиномы Бернштейна

$$P_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} (n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt, \quad (2)$$

определенные для любой интегрируемой функции $f(x)$, сходятся к ней во всех ее точках Lebesgue'a.

§4 Посвящен ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ сходимости в среднем полиномов (2) первого порядка. Есть основания предполагать, что ~~сходи-~~ полиномы (2) сходятся в среднем с показателем $p>1$ при единственном условии, что $f(x)$ интегрируема с p-ой степенью. ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ Аналогичная теорема для полиномов Stieltjes'a доказывается в §7. Далее в §4 даются приложения к условиям компактности множества интегрируемых функций, которые в §6 переносятся на множества измеримых функций. В §5 разбираются характерные свойства полиномов Бернштейна функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных. Наконец, §7, о котором мы уже говорили, содержит теорему о сильной сходимости (для любого показателя $p \geq 1$) полиномов Stieltjes'a к интегрируемой функции. Из этой теоремы (даже только для $p=1$) следуют почти все результаты мемуара L. Tonelli (Sopra alcuni polinomi approssimativi, Annali di Mat., t 25, 1916 стр. 275-32).

§2. Некоторые оценки.

Выведем некоторые оценки, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1°. Для всех x из $(0,1)$, $x\neq 0$ и $x\neq 1$, для всех целых n имеет место неравенство

$$(*)\qquad C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \frac{1}{n} h e^{-\frac{1}{2}h^2\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}, \qquad h=\sqrt{\frac{n}{2x(1-x)}},$$

если только k удовлетворяет условиям:

$$\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{x}<\frac{1}{10}, \qquad \frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{1-x}<\frac{1}{10}.$$

<u>Док-во.</u> По формуле Стирлинга

$$C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} < e^{\frac{1}{12}}\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\left(\frac{nx}{k}\right)^k\left(\frac{n(1-x)}{n-k}\right)^{n-k}$$

Оценим $\log W$, где $W=\left(\frac{nx}{k}\right)^k\left(\frac{n(1-x)}{n-k}\right)^{n-k}$

$$-\log W = k\log\left(1+\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\right)+(n-k)\log\left(1-\frac{\frac{k}{n}-x}{1-x}\right)$$

Так как $k=n\left(x+\left(\frac{k}{n}-x\right)\right)$, $n-k=n\left(1-x-\left(\frac{k}{n}-x\right)\right)$,

$$\log\left(1+\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\right)=\frac{\frac{k}{n}-x}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\right)^2\rho \qquad \rho=\frac{1}{\left(1+\theta_1\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\right)^2}$$

$$\log\left(1-\frac{\frac{k}{n}-x}{1-x}\right)=-\frac{\frac{k}{n}-x}{1-x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{k}{n}-x}{1-x}\right)^2\sigma \qquad \sigma=\frac{1}{\left(1-\theta_2\frac{\frac{k}{n}-x}{1-x}\right)}$$

Тогда

$$-\log W = n\left\{x\left(1+\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\right)\left(\frac{\frac{k}{n}-x}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\right)^2\rho\right)-(1-x)\left(1-\frac{\frac{k}{n}-x}{1-x}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{\frac{k}{n}-x}{1-x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{k}{n}-x}{1-x}\right)^2\sigma\right)\right\}=$$
$$=n\left\{x\left(\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\right)^2\left[1-\frac{\rho}{2}-\frac{\rho}{2}\left(\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\right)\right]+(1-x)\left(\frac{\frac{k}{n}-x}{1-x}\right)^2\left[1-\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{\frac{k}{n}-x}{1-x}\right)\right]\right\}$$

Но $\rho = \left(\frac{1}{1+\theta_1 \frac{\frac{k}{n}-x}{x}}\right)^2 < \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right)^2 = \frac{100}{81}$,

$$\frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\right) < \frac{100}{2\cdot 81}\,\frac{11}{10} < \frac{3}{4},$$

и аналогично для σ, так что

$$-\log W \geqq n\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}h^2\left(\frac{k}{n}-x\right)^2.$$

Но тогда

$$W \leqq e^{-\frac{1}{2}h^2\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}.$$

Остается еще заметить, что

$$e^{\frac{1}{12}}\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{1}{12}}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{2\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} < \frac{11}{10}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{1}{12}}\frac{1}{n}h < \frac{1}{n}h,$$

ибо $\frac{nx}{k} = 1 + \frac{\frac{k}{n}-x}{x} < \frac{11}{10}$ и аналогично $\frac{n(1-x)}{n-k}$.

2°. При всех n и x справедливо неравенство

$$(**)\qquad \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| > n^{-\frac{1}{3}}} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \frac{A}{n^s},$$

где ~~A – абсолютная постоянная, а~~ суммирование распространяется на k, удовл. неравенству $\left|\frac{k}{n}-x\right| > \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

~~См.~~ Док-во см. Л.В. Канторович, ДАН 1930 г., сер. А стр. 595, и стр. 600.

Здесь s – любое положительное число, а A зависит только от s:

§3 Дифференцирование полиномов Бернштейна в точке.

Мы докажем следующую

<u>Теорему 1</u> Если функция $f(x)$ ограничена на промежутке $(0,1)$ и в точке x_0 этого промежутка имеет производную порядка r: $f^{(r)}(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{(r)}(x) = f(x).$$

Теорема эта не нова для того случая, когда $f^{(r)}(x)$ существует для всех x и непрерывна [S. Wigert, Arkiv för Mat, Astr., Fys. 1932, И. Хлодовский, Труды 1-го Всесоюзного съезда математиков 1930].

Прежде всего заметим, что

$$B'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right) C_{n+1}^k \left\{k x^{k-1}(1-x)^{n-k+1} - (n+1-k)x^k(1-x)^{n-k}\right\} =$$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\left\{f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right\} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Совершенно аналогично легко получается

$$(1)\quad B_{n+r}^{(r)}(x) = \overbrace{\cancel{(n+r)^r}}^{(n+r)(n+r-1)\dots(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \Delta^r f\left(\frac{k}{n+r}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

где посредством $\Delta^r f\left(\frac{k}{n+r}\right)$ обозначена r-ая разность

$\cancel{\Delta^r f\left(\frac{k}{n+r}\right) =}$

$$\Delta^r f\left(\frac{k}{n+r}\right) = f\left(\frac{k+r}{n+r}\right) - r f\left(\frac{k+r-1}{n+r}\right) + \dots + (-1)^r f\left(\frac{k}{n+r}\right).$$

Отсюда легко следует упомянутая теорема Хлодовского – Wigert'а, если обратить внимание на тот факт, что в случае непрерывности $f^{(r)}(x)$, как известно, ~~„дифференц~~ „разностное отношение"

$$\cancel{(n+r)^r \Delta^r f\left(\frac{k}{n+r}\right)} \qquad \frac{\Delta^r f(x)}{\Delta x^r}$$

<u>равномерно</u> стремится к $f^{(r)}(x)$.

Из формулы (1) легко также следует наша теорема 1 для случая, когда $x=0$ (или $x=1$).

Именно, тогда

$$B^{(r)}_{n+r}(0) = (n+r)(n+r-1)\dots(n+1)\,\Delta^2 f(0) = \frac{\Delta^2 f(0)}{\Delta x^2}$$

а это, как известно, стремится к $f^{(r)}(0)$.

~~Б~~ Для ~~про~~ доказательства теоремы при $x \neq 0$ ~~или~~ и $x \neq 1$ ~~нам понадобится следующая~~ заметим, что

$$[\cancel{\ } x^k(1-x)^{n-k}]^{(r)} = Q(x)\, x^{k-r}(1-x)^{n-k-r} \quad (2)$$

где $Q(x)$ есть полином степени r. Нам понадобится следующая простая

Лемма. Полином $Q(x)$ может быть представлен ~~в~~ в виде суммы

(3) $$Q(x) = \sum_{i,j} n^i (k-nx)^j q(x),$$

где $q(x)$ ~~полиномы~~ некоторые полиномы относительно x, коэффициенты которых не зависят от n и k, а

$$2i + j \leqq r$$

Доказательство проводится индукцией: лемма верна при $r=0$; из (2) ~~...~~ следует далее

$$D^{r+1}[x^k(1-x)^{n-k}] = x^{k-r-1}(1-x)^{n-k-r-1}\{x(1-x)DQ(x) + $$
$$+ Q(x)[(k-nx)+2rx-r]\}.$$

Если теперь принять во внимание (3), то отсюда легко следует все что нужно.

Теперь заметим, что без вреда для общности можно предполагать, что в нашей точке x

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(r)}(x) = 0. \quad (4)$$

Если-бы это было не так, то мы ~~отняли бы от~~ составили-бы полином $P(x)$ такой, что в точке x_0

$$f^{(i)}(x_0) = P^{(i)}(x_0) \qquad i = 0, 1, \dots, r.$$

~~Тогда-бы~~ ~~Б~~ Если тогда положить $\varphi = f - P$, то получим: ~~$B_f(x)$~~ $B_n[f](x) = B_n[\varphi](x) + B_n[P](x)$

Так как, в силу ~~замечания~~ указанного выше*), все производные от $B_n[P]$ стремятся к соответственным производным P, то достаточно показать, что все производные порядка $\leqq r$ в точке x_0 для функции φ

*) Если не хотеть ссылаться на теорему Wigert'а, то достаточно заметить, что $B_n[P_s] = P_s + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{Q_{i,s}}{n^s}$, где P_s — полином s-ой степени, а $Q_{i,s}$ полиномы, не зависящие от n.

стремятся к нулю, т. е. все сводится к функции, удовлетворяющей условиям (4).

Для такой функции имеем

$$(5).\qquad |f(x)| \leqq (x-x_0)^2\, \varepsilon(\delta) \quad \text{для } |x-x_0| < \delta,$$

причем ε_δ стремится к нулю вместе с δ.

Покажем, что при сделанных предположениях

$$B_n^{(2)}(x_0)$$

будет числом сколь угодно малым вместе с $\frac{1}{n}$.

$$|B_n^{(2)}(x_0)| = \Big|\sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) C_n^k D^2 x^k (1-x)^{n-k}\Big|_{x=x_0}\Big| \leqq M \sum_{|\frac{k}{n}-x_0| \geqq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} C_n^k \left|D^2 x^k (1-x)^{n-k}\right|_{x=x_0} +$$

$$+ \varepsilon(n^{-\frac{1}{3}}) \sum_{|\frac{k}{n}-x_0| \leqq n^{-\frac{1}{3}}} C_n^k \left|D^2 x^k (1-x)^{n-k}\right| \cdot \left|\tfrac{k}{n}-x_0\right|^2_{x=x_0} = M\Sigma_I + \varepsilon(n^{-\frac{1}{3}})\Sigma_{II}\ {}^{*)}$$

Для оценки первой суммы в правой части этого неравенства на основании (2) и (3) заключаем

$$\left|D^2 x^k (1-x)^{n-k}\right|_{x=x_0} \leqq n^2 \cdot B\, x_0^{k} (1-x_0)^{n-k},$$

где B постоянная относительно k и n. Тогда

$$\Sigma_I \leqq B n^2 \sum_{|\frac{k}{n}-x_0| \geqq n^{-\frac{1}{3}}} C_n^k x_0^k (1-x_0)^{n-k} \leqq AB\frac{1}{n},$$

~~если вос~~

если воспользоваться оценкой (**) с $s = 2+1$.

Что касается второй суммы, то ~~при больших n можно для всех ее слагаемых~~ имеем:

$$C_n^k \left|D^2 x^k (1-x)^{n-k}\right|_{x=x_0} = C_n^k \Big|\sum_{i,j} n^i (k-nx_0)^j q_{ij}(x_0)\Big|\, x_0^{k-2} (1-x_0)^{n-k-2} =$$

$$= \frac{1}{x_0^2 (1-x_0)^2}\, C_n^k x_0^k (1-x_0)^{n-k} \Big|\sum_{i,j} n^i (k-nx_0)^j q_{ij}(x_0)\Big| \qquad (6).$$

При достаточно большом n ~~для любого слагаемого второй суммы~~ и при всех k, удовлетворяющих условию $\left|\frac{k}{n}-x_0\right| < n^{-\frac{1}{3}}$ можно применить оценку (*), которая дает

*) Что мы во вторую сумму собираем слагаемые, для которых $\frac{k}{n}-x_0$ имеет именно порядок $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, не вызывается существом дела, можно было в Σ_{II} взять больше слагаемых и тогда можно было-бы пользоваться более грубой оценкой, чем (**).

$$C_n^k x_0^k (1-x_0)^{n-k} < \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2x_0(1-x_0)}} e^{-\frac{1}{2} n \frac{1}{2x_0(1-x_0)} \left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2}.$$

Тогда неравенство (6) дает

$$C_n^k \left| D^r x^k (1-x)^{n-k} \right|_{x=x_0} < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i,j} A_{i,j}\, n^i |k - n x_0|^j e^{-\alpha^2 n \left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2},$$

$$2i + j \leqq r.$$

где $A_{i,j}$ и α положительные числа, не зависящие от n и k. Тогда

$$\Sigma_{II} < \sum_{i,j} A_{ij} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x_0\right| \leqq n^{-\frac{1}{3}}} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{i+j} \left|\frac{k}{n}-x_0\right|^{r+j} e^{-\alpha^2 n \left(\frac{k}{n}-x_0\right)^2}$$

Если положить

$$\left(\frac{k}{n}-x_0\right)\sqrt{n} = l_k,$$

то внутренняя сумма не превзойдет

$$\sum_{|l_k| < n^{\frac{1}{6}}} \frac{1}{\sqrt{n}} |l_k|^{r+j} e^{-\alpha^2 l_k^2}.$$

причем l_k пробегают ряд ~~знач~~ равноотстоящих значений промежутка $(-n^{\frac{1}{6}}, +n^{\frac{1}{6}})$ с разностью

$$l_{k+1} - l_k = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Легко обычными в таких случаях методами показать, что при больших n эта сумма меньше

$$(1+\varepsilon') \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{r+j} e^{-\alpha^2 t^2} dt = C_j$$

где ε' произвольное положительное число.

Тогда для суммы Σ_{II} получим

$$\Sigma_{II} < \sum_{i,j} A_{i,j} C_j = C,$$

$\sqrt{n}$ в знамен.

так что

$$|B_n^{(r)}(x_0)| < \frac{MAB}{n} + C\,\varepsilon(n^{-\frac{1}{3}}),$$

что и завершает доказательство теоремы.

(6)

§4. Обобщенные полиномы Бернштейна. Сходимость в среднем.

Наряду с обычными полиномами Бернштейна можно рассматривать такие полиномы:

(1) $$P_n^f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt$$

связанные с функцией $f(x)$, заданной на промежутке $(0,1)$ и имеющие перед обычными то преимущество, что они определены для любой интегрируемой функции. Они впервые были рассмотрены Л.В. Канторовичем (ДАН, 1930, сер. А, стр. 563). На основании формулы (1) §3 имеем, если $F(x)$ означает один из неопределенных интегралов от $f(x)$:

$$\left[B_{n+1}^F(x)\right]' = P_n^f(x). \qquad (2)$$

На основании теоремы 1 ~~получаем~~ отсюда получается

Теорема 2. Во всякой точке Lebesgue'а функции $f(x)$ /т. е. во всякой точке, где $F'(x)$ существует и равна $f(x)$/ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P_n^f(x) = f(x). \qquad (3)$$

Эта теорема была доказана Л.В. Канторовичем совсем другим способом, непосредственным изучением полиномов $P_n(x)$.

Теорема 3. Полиномы $P_n(x)$ сходятся к генерирующей функции $f(x)$ в среднем порядка 1.

Пусть $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. Тогда

$$\|P_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx \cdot (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot B(k+1, n-k+1) \cdot (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t)|\,dt$$

Так как $B(k+1, n-k+1) = \frac{1}{(n+1)\,C_n^k}$, получаем отсюда

$$\|P_n^f\| \leq \|f\| \qquad (4).$$

Докажем теперь, что $\|f-P_n^f\| \to 0$. Как известно, для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать непрерывную функцию $\varphi(x)$ так, что $\|f-\varphi\|<\varepsilon$. Для функции $\varphi(x)$, при большом n ~~легко проверя~~ будет:

$$\|\varphi - B_n^\varphi\| < \varepsilon, \quad \|B_n^\varphi - P_n^\varphi\| < \varepsilon.$$

Но на основании (4) тогда

$$\|P_n^f - P_n^\varphi\| = \|P_n^{f-\varphi}\| \leqq \|f-\varphi\|.$$

Собирая все эти неравенства, получим

$$\|f - P_n^f\| < 4\varepsilon,$$

ч. т. д.

<u>Теорема 4.</u> Для компактности некоторого множества $\mathfrak{F}=\{f\}\subset L_1$ состоящего из интегрируемых (L) функций необходимо и достаточно, чтобы

$$1^\circ, \quad \|f-P_n^f\| \to 0$$

равномерно относительно элемента $f\in\mathfrak{F}$,

$$2^\circ. \quad \|f\| \leqq A.$$

а/. <u>Необходимость.</u> Необходимость 2° очевидна. Если теперь 1° не выполнено, то найдется такая последовательность функций $f_k \in \mathfrak{F}$ и соответственных полиномов $P_{n_k}^{f_k}$ таких, что

$$\|f_k - P_{n_k}^{f_k}\| \geqq \delta_0 > 0. \qquad (n_k \to \infty)$$

Если-бы тем не менее $\|f_k - f\| \to 0$, $f\in L_1$, то получили-бы:

$$\|f_k - f\| \geqq \|f_k - P_{n_k}^{f_k}\| - \|P_{n_k}^{f_k} - P_{n_k}^{f}\| - \|P_{n_k}^f - f\|$$

При больших k правая часть неравенства (ср. (4)) больше $\frac{\delta_0}{2}$, а это ведет к противоречию.

в/. <u>Достаточность.</u> Прежде всего, если выполнены усл. 1-2, множества $\mathfrak{F}_n = \{P_n^f\}$ будут компактны. В самом деле, коэффициенты полиномов P_n^f при фиксированном n ограничены, ибо $\left|(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt\right| \leqq (n+1)\|f\| \leqq (n+1)A.$

Поэтому для $\mathfrak{F}_n$ существует конечная δ-сеть*) для любого δ. Если n таково, что $\|P_n^f - f\|<\delta$, $f\in\mathfrak{F}$, то она будет 2δ сетью и для $\mathfrak{F}$. Но наличие 2δ-сети при любом δ н. и д. для компактности $\mathfrak{F}$, ч. т. д.

*) Множество $A\subset L_1$ будет δ-сетью для $\mathfrak{F}_n$, если для любого элемента $f\in\mathfrak{F}_n$ найдется элемент $\varphi\in A$ такой, что $\|\varphi-f\|<\delta$.

§5. Функции ограниченной вариации.

Мы будем теперь рассматривать полиномы Бернштейна

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \qquad (1)$$

для функций f ограниченной вариации (непрерывных или нет), ~~и нормированных тем, что~~

$$\cancel{f(0)=0.} \qquad \cancel{(2)}$$

Если сперва $f(x)$ монотонно неубывает, то

$$B'_{n+1}(x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\left\{f\left(\tfrac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\tfrac{k}{n+1}\right)\right\} C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k} \geq 0,$$

так что полиномы Бернштейна для f также будут монотонно неубывать. При этом

$$V_n = \operatorname*{Var}_{(0,1)} B_n(x) = f(1) - f(0) = \operatorname*{Var}_{(0,1)} f(x) = V. \qquad (2)$$

Произвольную функцию ограниченной вариации $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — положительная и отрицательная вариации $f(x)$ — суть неубывающие функции, ~~удовлетворяющие условию (2)~~. Тогда $B_n^f = B_n^\varphi - B_n^\psi$, B_n^φ и B_n^ψ монотонно возрастают и ~~уд~~ положительны, так что

$$V_n = \operatorname{Var} B_n^f \leq \operatorname{Var} B_n^\varphi + \operatorname{Var} B_n^\psi = \operatorname{Var}\varphi + \operatorname{Var}\psi =$$
$$= \operatorname{Var} f = V \qquad (3)$$

Таким образом,

$$\limsup_n V_n \leq V. \qquad (4)$$

Пусть теперь $f(x)$ ~~а~~ произвольная функция, для которой в любой точке x_0, $0 \leq x_0 \leq 1$ существуют пределы справа и слева, а значение функции в самой точке x_0 лежит между пределами справа и слева.[1] Тогда, как известно /~~см.~~

[1] Про такую ф-цию будем говорить, что она обладает свойством А.

во всех ~~точках~~ непрерывности $B_n(x) \to f(x)$, ~~а в точках разрыва~~

$$\cancel{B_n(x) \to \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}}$$

Так как точек ~~второго рода~~ разрыва первого рода в интервале (0, 1) будет не более чем исчислимое множество (см. напр. Hobson, The ~~theory~~ of functions of a real variable, vol. I, p. 304), полная вариация $f(x)$ может быть рассматриваема, как точная верхняя граница сумм

$$(5) \qquad \sum_{r=1}^{s} |f(x_r) - f(x_{r-1})| \quad , 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_s = 1,$$

где x_r — точки непрерывности $f(x)$. При больших n к сумме (5) сколь угодно близким будет число

$$\sum_{r=1}^{s} |B_n(x_r) - B_n(x_{r-1})| \leqq V_n.$$

Таким образом,

$$(6) \qquad \liminf_{n} V_n \geqq V.$$

Сопоставляя все сказанное, можно сформулировать такие теоремы:

Теорема 5. Для того, чтобы функция $f(x)$, ~~удовлетворяющая условиям~~ обладающая свойством A, была ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы ее полиномы Бернштейна $B_n(x)$ были равномерно ограниченной вариации.

Теорема 6. Если $f(x)$ функция ограниченной вариации, то

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname*{Var}_{0,1} B_n(x) = V,$$

где V есть ~~вариация~~ „существенная вариация" $f(x)$, т. е. ~~вар~~ полная вариация функции $f_1(x)$, совпадающей с $f(x)$ в точках непрерывности этой последней, а в точке разрыва x_0 определенной по произволу между $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.

Будем теперь рассматривать абсолютно непрерывные функции в промежутке (0, 1).

Теорема 7. Для того, чтобы функция $f(x)$ была абсолютно непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы полиномы Бернштейна сходились к ней по вариации:

(7). $$\operatorname*{Var}_{0,1}\{f(x)-B_n(x)\}\to 0.$$

а/ Необходимость. Если $f(x)$ абсолютно непрерывна, то

$$\operatorname*{Var}_{0,1}\{f(x)-B_n(x)\} = \int_0^1 |f'(x)-B_n'(x)|\,dx = \int_0^1 |f'(x)-P^{f'}_{n-1}(x)|\,dx \to 0,$$

если воспользоваться ф-лой (2) и теоремой 3 §4.

b/. Достаточность. Из условия (7) следует прежде всего, что числа $\operatorname*{Var}_{0,1} B_n(x)=V_n$ ограничены. Но тогда

$$V=\operatorname{Var} f(x) \leqq \operatorname{Var} B_n(x) + \operatorname*{Var}_{0,1}\{f(x)-B_n(x)\}$$

есть также число конечное, и следовательно $f(x)$ — функция ограниченной вариации. Если-бы она не была абсолютно непрерывной*) в интервале $(0,1)$ существовало-бы множество E меры нуль, ~~вариация~~ вдоль которого вариация функции $f(x)$ была бы $V_E>0$. ~~Выберем n настолько большим, что~~

$$\operatorname*{Var}_{0,1}\{f-B_n\}<\tfrac{1}{2}V_E,$$

~~и затем открытое множество $G\supset E$, такое, что~~

$$\operatorname*{Var}_{x\in G} B_n(x) = \int_G |B_n'(x)|\,dx < \tfrac{1}{2}V_E.$$

~~Тогда~~

Но тогда

$$\operatorname*{Var}_{0,1}\{f-B_n\} \geqq \operatorname*{Var}_{x\in E}\{f-B_n\} \geqq \operatorname*{Var}_{x\in E} f - \operatorname*{Var}_{x\in E} B_n = V_E,$$

так как

$$\operatorname*{Var}_{x\in E} B_n = \int_E |B_n'(x)|\,dx = 0,$$

что ведет к противоречию с (7), так что теорема доказана вполне.

Теорема 8. Для компактности некоторого множества $\mathfrak{F}$ функций ограниченной вариации необходимо и достаточно, чтобы ~~полиномы~~

$$\operatorname*{Var}_{0,1}\{f-B_n^f\}\to 0$$

равномерно относительно $f\in\mathfrak{F}$.

Компактность здесь понимается в смысле

*) То, что условие (8) не может быть выполнено для всех f ограниченной вариации следует уже из несепарабельности множества всех функций огр. вар.; но ~~это условие не выполнено ни для одной~~ в дальнейшем доказывается больше.

сходимости по вариации.

Теорема эта очевидна, ибо сходимость B^{f}_{n+1} к f по вариации равносильна сходимости $P^{f'}_n$ к f' в среднем порядка 1, так что она есть следствие теоремы 4.

§6. Компактность в пространстве измеримых функций.

Для произвольной измеримой на промежутке $(0,1)$ функции полиномы B^f_n и P^f_n, вообще, ~~теряют~~ смысл. ~~Но тогда~~ Мы однако и в этом случае сможем доказать теорему, аналогичную теореме 4, введя в рассмотрение полиномы

$$Q^f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C^k_n x^k (1-x)^{n-k} \underset{\frac{k}{n}-3n^{-\frac{1}{3}}}{\overset{\frac{k}{n}+3n^{-\frac{1}{3}}}{m.\,m.}} [f(x)]_n \quad (1),$$

введенные впервые Л. В. Канторовичем (Мат. Сб., том 41, вып. 3, 1934, стр 503). При этом $[f(x)]_n$ есть функция, получающаяся из $f(x)$ „сжиманием" числом n, а

$$\overset{b}{\underset{a}{m.\,m.}}\,\varphi(x)$$

есть такое число h, что

$$m\,\mathcal{E}\left(f(x) \geqq h\right) \geqq \frac{b-a}{2}, \text{ а } m\,\mathcal{E}\left(f(x) \geqq h+\delta\right) < \frac{b-a}{2} \text{ для любого } \delta > 0.$$

Эти условия определяют число h единственным образом.

Рассмотрим теперь пространство S всех измеримых и конечных на $(0,1)$ функций. Оно будет метрическим пространством, если ввести как расстояние между двумя функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$

$$\rho(f,\varphi) = \int_0^1 \frac{|f-\varphi|}{1+|f-\varphi|}\,dx \qquad (2)$$

Даже больше, S будет тогда пространством типа F

Banach'a (см. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932, p. 35). Сходимость ~~тоже~~ в смысле метрики (2) будет равносильна сходимости по мере. Это легко следует из того обстоятельства, что близость f и φ в смысле метрики (2) равносильна близость по мере. Точнее, из $\rho(f,\varphi)<\varepsilon$ следует (если $\varepsilon<\frac{1}{4}$) $m\,\mathcal{E}\left(|f-\varphi|\geqq 2\sqrt{\varepsilon}\right)<\sqrt{\varepsilon}$, а из $m\,\mathcal{E}\left(|f-\varphi|\geqq\varepsilon\right)<\varepsilon$ следует $\rho(f,\varphi)<2\varepsilon$. Исследуем вопрос, когда подмножество $\{f\}=F\subset S$ будет компактным, т. е. когда из всякой его ~~под~~последовательности можно выделить сходящуюся по мере / ~~или~~ или, что то-же, можно выделить сходящуюся почти везде / подпоследовательность. По этому поводу имеет место следующая теорема, принадлежащая Frechet и Veress'y (см. Frechet, Fund. Math., t IX):

<u>Теорема 9.</u> Для компактности F необходимо и достаточно, чтобы

1°. По любому $\varepsilon>0$ можно было указать N так, что
$$m\,\mathcal{E}\left(|f(x)|\geqq N\right)<\varepsilon \quad \text{для всех } f\in F$$

2°. По любому $\varepsilon>0$ можно было для каждой $f\in F$ указать множество $E_f\subset(0,1)$ так, чтобы $mE_f>1-\varepsilon$, и чтобы $f\in F$ были равномерно непрерывна на E_f.

Докажем теперь

<u>Теорему 10.</u> Для компактности $F\subset S$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ можно было указать N так, чтобы
$$m\,\mathcal{E}\left(|Q_n^f(x)-f(x)|\geqq\varepsilon\right)<\varepsilon \quad \text{для } f\in F \text{ и } n\geqq N. \quad (3).$$

а/. <u>Достаточность.</u> При фиксированном n коэффициенты полиномов (1) для всех $f\in F$ ограничены. Они образуют таким образом компактное множество $\{Q_n^f\}$, в котором при любом δ можно выделить конечную δ-сеть. Дальше доказательство ведется совершенно так, как в теореме 4, если только принять во внимание замечание сделанное в начале этого §.

б/. Необходимость. Пусть F компактно. Тогда, на основании теоремы Frechet, по каждым $\varepsilon>0$ ~~и N_2~~, можно для всякой функции $f\in F$ указать множество E_f, $mE_f > 1-\varepsilon$ и кроме того числа h_0, N так, что при $x,y\in E_f$ из $|x-y|<h_0$ следует $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, причем еще $|f(x)|<N$, если $x\in E_f$, $f\in F$. Возьмем теперь N_0 так, чтобы

$$(4)\qquad 4N_0^{-\frac{1}{3}}<h_0,\quad N_0>N,\quad \frac{A}{N^2}<\varepsilon,$$

где A – константа оценки $(**)$ §2, соответствующая $s=3$.

Пусть $n\geqq N_0$. Рассмотрим интервалы $(x-4n^{-\frac{1}{3}}, x+4n^{-\frac{1}{3}})$, где $x\in(0,1)$. Часть CE_f, в них лежащая, может для некоторых интервалов иметь меру $\geqq 2n^{-\frac{1}{3}}$ /т.е. не меньше $\frac{1}{4}$ длины интервала/. Рассмотрим множество M_f^n центров таких интервалов. Оно замкнуто. С другой стороны, оно покрывается некоторым множеством ~~выше указанных~~ интервалов $(x-4n^{-\frac{1}{3}}, x+4n^{-\frac{1}{3}})$, имеющих вышеуказанную особенность. Выделим конечное покрытие. Можно, очевидно, считать, что никакие три интервала покрытия не имеют общих точек. Так как $mCE_f<\varepsilon$, сумма длин выделенных таким образом интервалов не превосходит 8ε. Но тогда и подавно

$$mM_f^n<8\varepsilon.$$

Пусть теперь $x_0\,\overline{\in}\, M_f^n+CE_f$. Оценим тогда

$$|Q_n^f(x_0)-f(x_0)|\leqq\sum_{\left|\frac{k}{n}-x_0\right|<n^{-\frac{1}{3}}} C_n^k x_0^k(1-x_0)^{n-k}\left|\underset{\frac{k}{n}-3n^{-\frac{1}{3}}}{\overset{\frac{k}{n}+3n^{-\frac{1}{3}}}{m.\,m.}}[f(x)]_n-f(x)\right|+ \qquad (5)$$

$$+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x_0\right|\geqq n^{-\frac{1}{3}}}$$

По оценке (**) §2 вторая сумма на основании (4) не превосходит $\frac{A}{n^2} < \varepsilon$.

Так как $x_0 \in E_f$ и $x_0 \overline{\in} M_f^n$

$$\mathcal{E}\left(|f(x)-f(x_0)| > \varepsilon,\ |x-x_0| < 4n^{-\frac{1}{3}}\right) \subset CE_f.$$

и потому имеет меру $< 2n^{-\frac{1}{3}}$. Поэтому, если $|\frac{k}{n}-x_0| < n^{-\frac{1}{3}}$, наверное

$$m\,\mathcal{E}\left(|f(x)-f(x_0)| > \varepsilon,\ |\tfrac{k}{n}-x| < 3n^{-\frac{1}{3}}\right) < 2n^{-\frac{1}{3}}$$

Так как на CE_f $|f(x)| \leqq n$, то для этого k

$$\left| \underset{\frac{k}{n}-3n^{-\frac{1}{3}}}{\overset{\frac{k}{n}+3n^{-\frac{1}{3}}}{m.\ m.}} [f(x)]_n - f(x_0)\right| \leqq \varepsilon.$$

Теперь легко сообразить, что первая сумма в (5) не превосходит ε и в итоге

$$m\,\mathcal{E}\left(|P_n^f(x) - f(x)| \geqq 2\varepsilon\right) < 9\varepsilon \quad \text{для всех } n \geqq N_0,$$

а это и есть 1°.

Промежуточной между теоремами 9 и 10 является такая

<u>Теорема 11.</u> Для компактности $F \subset S$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ нашлось число $N > 0$ и функции $\varphi_f(x)$, $f \in F$, равномерно непрерывные в совокупности на промежутке $(0,1)$, ограниченные числом N и такие, что

$$m\,\mathcal{E}\left(|\varphi_f(x) - f(x)| \geqq \varepsilon\right) < \varepsilon$$

Достаточность этого условия доказывается просто /как достаточность в теореме 10/, а необходимость следует из теоремы 10.

Сходимость в среднем полиномов Stieltjes'а.

Полиномом Stieltjes'а для интегрируемой функции $f(x)$, заданной в промежутке $(0,1)$ называется

$$(1)\quad P_n(x) = \frac{1}{K_n}\int_0^1 f(u)\left[1-(x-u)^2\right]^n du,$$

где $K_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$

Точнее, K_n лежит между $\sqrt{\frac{\pi}{n+1}}$ и $\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Для удобства, продолжим функцию $f(x)$ на всю бесконечную ось $(-\infty,+\infty)$, считая ее равной нулю вне $(0,1)$.

$P_n(x)$ можно записать так:

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n}\int_{-x}^{1-x} f(x+t)(1-t^2)^n dt = \cancel{(2)}$$

$$= \frac{1}{K_n}\int_{-1}^{+1} f(x+t)(1-t^2)^n dt \qquad (2)$$

Разобьем промежуток $(-1,+1)$ на частичные промежутки δ, так что $(-1,+1) = \sum\delta$ и посредством M_δ обозначим максимум $(1-t^2)^n$ на этом промежутке.

Тогда

$$|P_n(x)| \leqq \sum_\delta \frac{1}{K_n}\int_\delta |f(x+t)|(1-t^2)^n dt \leqq \frac{1}{K_n}\sum_\delta M_\delta \delta \cdot \frac{1}{\delta}\int_\delta |f(x+t)|dt$$

Предположим теперь, что $f(x)$ есть функция, интегрируемая с p-ой степенью $(p>1)$ и

$$\|f\| = \left\{\int_{-1}^{+1}|f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Вычислим тогда норму функции

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\int_\delta |f(x+t)|dt.$$

Очевидно,

$$\|f_\delta\|^p = \frac{1}{\delta^p}\int_{-1}^{+1}\left\{\int_\delta |f(x+t)|dt\right\}^p dx \leqq \frac{1}{\delta^p}\int_{-1}^{+1}\left\{\delta^{\frac{p}{q}}\int_\delta |f(x+t)|^p dt\right\}dx =$$

$$= \delta^{\frac{p}{q}-p}\int_\delta\left\{\int_{-1}^{+1}|f(x+t)|^p dx\right\}dt \leqq \delta^{\frac{p}{q}-p+1}\|f\|^p = \|f\|^p. \quad (3)$$

Таким образом, если обозначить $K_n^{(\delta)} = \sum_\delta M_\delta \cdot \delta$

$$(4)\quad |P_n(x)| \leq \cancel{\frac{\sum M_\delta\cdot\delta}{K_n}}\ \frac{K_n^{(\delta)}}{K_n}\sum_\delta \frac{M_\delta\cdot\delta}{K_n^{(\delta)}} f_\delta(x) = \frac{K_n^{(\delta)}}{K_n} Q(x).$$

Функция $Q(x)$, рассматриваемая как точка пространства L_p, есть центр тяжести точек $f_\delta(x)$ того-же пространства, нагруженных массами $\frac{M_\delta\cdot\delta}{K_n(\delta)}$, в сумме дающими единицу. Все точки $f_\delta(x)$ удалены от начала координат не более, чем на $\|f\|$, на основании (3). ~~Поэтому и~~ ~~$\|Q\| \leq$~~ Так как в пространстве L_p шар есть выпуклое множество, будем иметь:

$$\|Q\| \leq \|f\|,$$

что в соединении с (4) дает

$$\|P_n\| = \left\{\int_{-1}^{+1}|P_n(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{K_n^{(\delta)}}{K_n}\|f\|,$$

а если устремить интервалы δ к нулю и вспомнить определение $K_n^{(\delta)}$, получим наконец в пределе

$$\|P_n\| \leq \|f\| \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Теперь легко получить

Теорему 12. Если функция $f(x)$ интегрируема с p-ой степенью ($p>1$), то полиномы Stieltjes'a сходятся к ней в среднем порядка p:

$$\int_0^1 |f(x)-P_n(x)|^p\,dx \longrightarrow 0.$$

Доказательство опирается на неравенство (5) и тот факт, что для непрерывных функций имеет место (приблизительно) равномерная сходимость; оно совершенно аналогично доказательству теор. 3 §4.